

UNIVERSITÄT BONN

Physikalisches Institut

Lagemessung des extrahierten Strahls am Elektronenbeschleuniger ELSA mittels Hochfrequenzresonatoren

von
Thorsten Pusch

In order to continuously monitor the position of the external beam at the electron accelerator facility ELSA, a non-perturbing beam position measurement system is required. By utilizing the resonance phenomena in a cavity, a measurable signal can be gained from currents of a few nA. A proven resonator design has been optimized for its intended use with the aid of numerical simulations. The MAFIA code performs calculations of the relevant properties such as resonance frequency, shunt impedance and quality factor of a given geometry, thus enabling their fine-tuning and predictions of the effects of frequency tuning devices. A position signal above noise level will be obtained by a narrowband detection with lock-in amplifiers. The components for the RF circuitry have been carefully chosen considering noise, insulation and temperature stability. First tests indicate the need for further shielding and grounding optimization. A preliminary construction plan for the cavity has been provided by collaborators, thus enabling the construction and the consecutive testing of the cavity together with the RF circuitry in the near future.

Post address:
Nussallee 12
53115 Bonn
Germany



BONN-IB-2009-09
Bonn University
October 2009

UNIVERSITÄT BONN
Physikalisches Institut

**Lagemessung des extrahierten Strahls am
Elektronenbeschleuniger ELSA mittels
Hochfrequenzresonatoren**

von
Thorsten Pusch

Dieser Forschungsbericht wurde als Diplomarbeit von der Mathematisch - Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Bonn angenommen.

Angenommen am: 09.08.2005
Referent: PD Dr. W. Hillert
Korreferent: Prof. Dr. R. Maier

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Die Experimente an der Beschleunigeranlage ELSA	1
1.2	Strahllagemessung mittels Hochfrequenzresonatoren	4
2	Die Struktur des Elektronenstrahls	6
2.1	Aufteilung in Elektronenpakete	6
2.2	Die longitudinale Teilchendichte eines Bunches	7
2.3	Der Einfluss der Bunchstruktur auf das Anregungsspektrum	9
3	Theorie der Hohlraumresonatoren	11
3.1	Die Resonatormoden	11
3.2	Interessante Resonatormoden für die Beschleunigerphysik	11
3.3	Zusammenhang zwischen Resonatorgeometrie und Eigenfrequenzen	13
3.4	Der Resonator als Schwingkreis	15
3.5	Ankopplung des Resonators an äußere Schaltungen	18
3.6	Anregung des Resonators durch eine Signalquelle	20
3.6.1	Der Resonator als Abschlussimpedanz einer Wellenleitung	20
3.6.2	Die äußere Beschaltung als zusätzliche Last im Schwingkreis	21
3.7	Anregung des Resonators durch einen Teilchenstrahl	23
3.7.1	Der Resonator als von der Strahlage abhängiger Widerstand	23
3.7.2	Laufzeiteffekte in Abhängigkeit von der Resonatorlänge	24
3.8	Die ausgekoppelte Signalleistung	24
3.9	Das Programmpaket <i>MAFIA</i> zur Simulation von Feldverteilungen	26
4	Entwicklung des Lagemonitors	28
4.1	Wahl und Stabilisierung der Resonator-Mode	28
4.2	Festlegung der Betriebsfrequenz des Monitors	29
4.3	Bestimmung der Resonatorlänge	31
4.4	Platzierung der Einkopplung	31
4.5	Anpassung der Resonanzfrequenz durch einen Abstimmstempel	32
4.6	Entkoppelung der beiden Resonatoren	33
5	Numerische Simulation der Feldverteilung	36
5.1	Wahl der Simulationsparameter	36
5.2	Eigenmoden in der Nähe der Nutzfrequenz	37
5.3	Simulation des Resonators mit <i>MAFIA</i>	38
5.4	Berechnung der Möglichkeiten zur Frequenzkorrektur	39
5.5	Einschätzung der Zuverlässigkeit der Ergebnisse	41
5.6	Berechnung von wichtigen Kenngrößen des Lagemonitors	41
5.6.1	Die Güte des Resonators	42
5.6.2	Die Shuntimpedanz für verschiedene Ablagen	42
6	Anpassung an die Betriebsbedingungen	44
6.1	Einstellen der Kopplung	44
6.1.1	Temperaturabhängigkeit der Resonanzfrequenz	44
6.1.2	Wahl der Koppelstärke	44
6.2	Abschätzung der Signalleistung	46
6.3	Berücksichtigung von Vakuum und Wasserkühlung	47

6.4	Abschätzung des Messfehlers bei großen Strahlablagen	48
7	Die Ausleseelektronik	50
7.1	Grundlagen des Aufbaus	50
7.2	Die verwendeten Komponenten	51
7.2.1	Der Nutzsignalzweig	52
7.2.2	Der Referenzsignalzweig	52
7.2.3	Der Oszillator-Zweig	52
7.3	Untersuchung des Signalverhaltens	53
8	Zusammenfassung und Ausblick	54
A	Anhang	56
A.1	Wellenausbreitung in Leitern	56
A.1.1	Die Maxwellgleichungen in Zylindersymmetrie	56
A.1.2	Klassifikation der Lösungen nach Randbedingungen	57
A.1.3	Kreiszyllindrische Wellenleiter und deren Moden	58
A.1.4	Die Feldgeometrien der einzelnen Moden	58
A.1.5	Hohlraumresonatoren	60
A.2	Ähnlichkeitsgesetze für Hochfrequenzstrukturen	62
A.3	Die Funktionsweise eines Lock-In-Verstärkers	63
A.4	Die Funktionsweise eines Mischers	64
B	Konstruktionszeichnungen	66
	Literaturverzeichnis	69
	Danksagung	70

1 Einleitung

Das physikalische Institut der Universität Bonn betreibt seit 1987 eine **Elektronen Stretcher Anlage**, genannt **ELSA**. Zusammen mit einem Booster-Synchrotron als Vorbeschleuniger, welches von wahlweise einem von zwei Linearbeschleunigern gefüllt wird, werden an ihr Experimente der Mittelenergiephysik durchgeführt. In Abbildung 1.1 findet sich ein Überblick über die gesamte Beschleunigeranlage.

Wie der Name schon andeutet, kann an ELSA externen Experimenten ein „gestreckter“, also nahezu kontinuierlicher Elektronenstrahl zugeführt werden. Die Extraktionszeit des Synchrotrons von maximal 1 ms ist vergleichsweise kurz gegen seine Zykluszeit von 20 ms, weswegen es nur noch als Vorbeschleuniger eingesetzt wird: mit sieben Füllungen des Synchrotrons kann der **ELSA**-Speicherring dreifach gefüllt werden und die Teilchen auf Grund seiner Bauart als „separated function“-Maschine¹ für längere Zeit halten. Mittels langsamer Resonanzextraktion kann je nach Betriebsmodus ein *makroskopisches Tastverhältnis*² von bis zu 98 % erreicht werden.

1.1 Die Experimente an der Beschleunigeranlage ELSA

Folgende Experimente nutzen die Beschleunigeranlage:

Synchrotronlichtlabor: Die im Stretcherring umlaufenden Elektronen erfahren vielfältige Änderungen in Betrag und Richtung ihrer Geschwindigkeit. Als beschleunigte Ladungen senden sie dabei elektromagnetische Strahlung aus ([Jac98], Kap. 14), insbesondere bei der radialen Ablenkung in den Dipolmagneten, welche die Teilchen in Kurvenstücken des Beschleunigerovals auf der Bahn halten. Dieses sogenannte *Synchrotronlicht* wird in einem Lichtkegel mit sehr kleinem Öffnungswinkel tangential zur Teilchenbahn ausgesandt und deckt einen von infraroten Wellenlängen bis hin zur harten Röntgenstrahlung reichenden Bereich im Spektrum ab. Es kann unter Anderem zur Strukturuntersuchung an verschiedenartigen Materialien sowie zur Erforschung von chemischen Vorgängen verwendet werden. Im Rahmen dieser Experimente (siehe Abbildung 1.1, rechts unten) wird ein möglichst lange im Stretcherring umlaufender Elektronenstrahl benötigt, im entsprechenden Beschleunigerbetriebsmodus findet eine Extraktion, wie etwa bei den teilchenphysikalischen Experimenten, nicht statt.

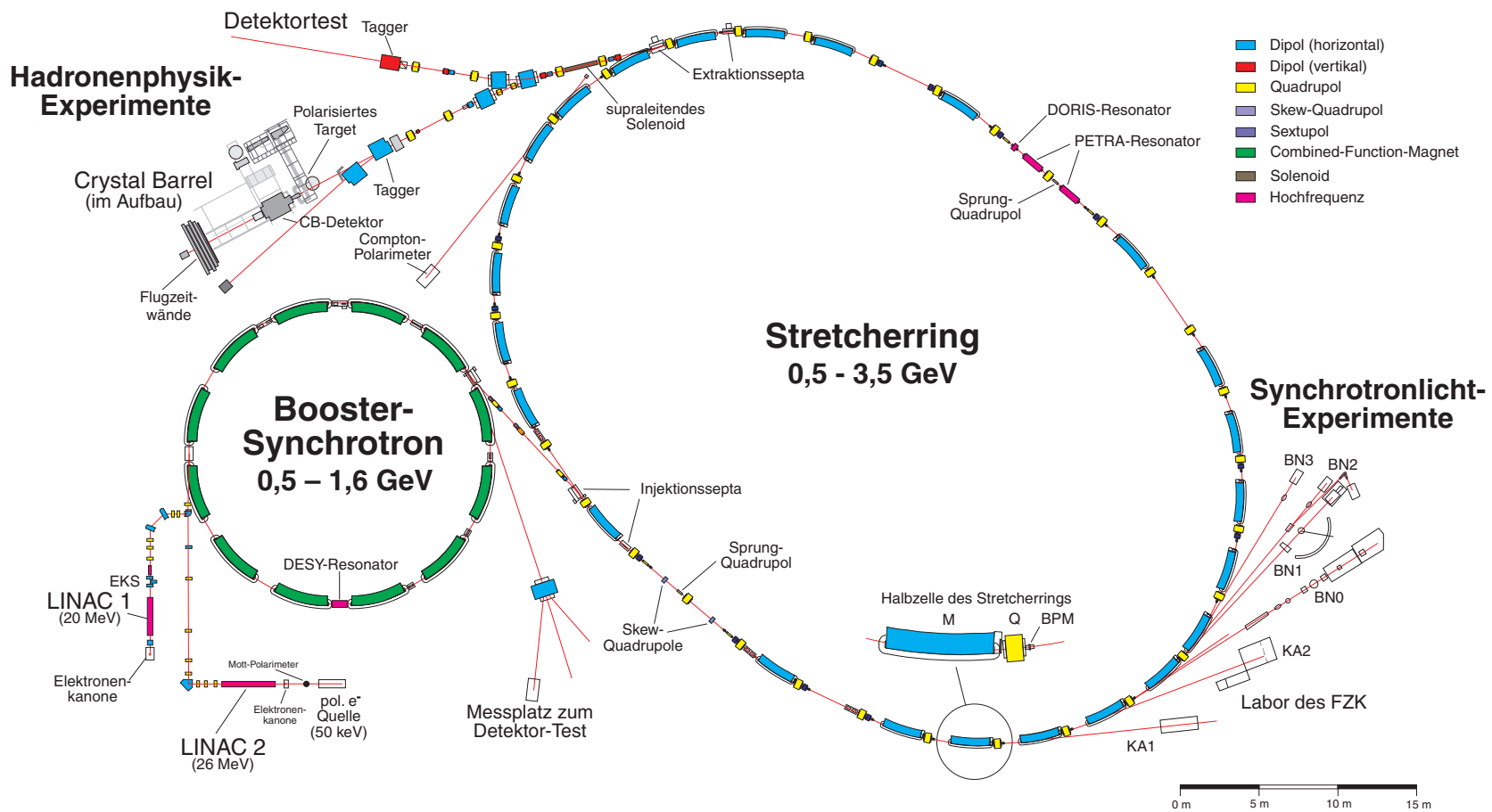
Crystal Barrel: Im Rahmen des „Crystal Barrel“-Experiments werden die auf die gewünschte Endenergie beschleunigten Elektronen aus dem **ELSA**-Ring extrahiert (Abbildung 1.1, links oben) und mittels eines Systems von Magneten, welches im Folgenden als *externe Strahlführung* bezeichnet wird, auf ein erstes Zielobjekt geleitet, das sogenannte *Tagging Target*³. Die im Coulombpotential der Gitteratome dieses Kristallwürfels abgelenkten und damit beschleunigten Elektronen geben, nach dem schon oben erwähnten Prinzip, elektromagnetische Strahlung in Form von hochenergetischen Photonen ab, deren Spektrum bis zur Elektronenstrahlenergie reicht. Mit diesen wird dann das eigentliche Target bestrahlt, wobei Untersuchungsgegenstand unter anderem die Photoproduktion von Mesonen ist.

¹Im Gegensatz zum Synchrotron werden separate Magnete für Ablenkung und Fokussierung verwendet, siehe auch [Wil92].

²Es bezeichnet das Verhältnis der Zeit mit Strahl am Experiment zur Gesamtzyklusdauer, die Bunchstruktur wird hierbei nicht berücksichtigt.

³Dort werden die Photonen erzeugt und mittels des nachfolgenden Aufbaus „markiert“ (von engl. „to tag“): die Restenergie eines aus seiner Ursprungsrichtung herausgelenkten Elektrons wird mittels eines Detektors gemessen, so dass damit die Energie des vorher von ihm abgestrahlten Photons bekannt ist.

Abbildung 1.1: Übersichtsplan der Bonner Elektronenbeschleunigeranlage



Detektor-Tests: Auf einem zweiten, direkt daneben gelegenen Experimentierplatz, der über die entsprechende Einstellung einer Strahlweiche⁴ in der externen Strahlführung ebenfalls mit Elektronen beschickt werden kann, finden ab Jahresende 2005 Untersuchungen an Detektorkomponenten statt. Deren Eigenschaften und Reaktion bei Durchtritt ionisierender Strahlung kann also am Beispiel der Elektronen untersucht werden.

Im Interesse der Experimentatoren, die an den beiden Experimentierplätzen für extrahierte Elektronen arbeiten, liegt es, dass der Elektronenstrahl exakt mittig durch das untersuchte Zielobjekt läuft. Außerdem sollte er möglichst parallel zu der longitudinalen Symmetrieachse des Detektoraufbaus ausgerichtet sein. Um an der Strahlage im Bedarfsfall Korrekturen vornehmen zu können, ist die Messung ihrer Position und Ausrichtung erforderlich. Dann kann über entsprechende Einstellungen der Magnetoptik in der externen Strahlführung eine Anpassung vorgenommen werden.

Um die Position der Strahlachse im Raum festzulegen, sind zwei Fixpunkte nötig. Für eine Lagemessung hinter dem Experiment wird im Fall des *Crystal Barrel*-Detektors eine *Photonkamera* verwendet, welche den ersten Bezugspunkt liefert: Die in Elektronenstrahlrichtung abgegebenen hochenergetischen Photonen produzieren in einem sogenannten *Konversionstarget* Elektron-Positron-Paare, welche an einer anliegenden Folie dann zur schwachen Abstrahlung von Licht führen. Dieses wird unter Einsatz eines Restlichtverstärkers von einer Kamera aufgefangen, deren Bild im Kontrollsystem des Beschleunigers in digitaler Form vorliegt. Damit kann dann auch eine Berechnung des Schwerpunkts sowie der Strahlbreite vorgenommen werden.

Vor dem Experiment erlauben es die bestehenden Diagnosemöglichkeiten, an verschiedenen Stellen in der externen Strahlführung sogenannte *Chromox*-Schirme in das Vakuumrohr zu fahren. Sie stehen dann in einem Winkel von 45° zum Strahl und erzeugen bei Durchtritt der Elektronen Fluoreszenzlicht. Mit einer von unten auf den Schirm gerichteten Kamera lässt sich dann ein Bild des Strahlquerschnitts erfassen. Seine Lage im Rohr ist dann auf dem Schirm zu erkennen, womit der zweite Bezugspunkt für die Strahlachse feststeht. Nachteil dieser Methode sind neben den Verlusten auch die Aufweitung des Strahls, also eine Verschlechterung seiner Qualität. Deswegen ist sie nur zu einer Grundjustierung der Lage geeignet, während der Datennahme des Experiments kann man sie nicht einsetzen⁵.

Ziel dieser Diplomarbeit ist die Konzipierung eines Monitorsystems, welches eine Strahlagemessung in der externen Strahlführung *mit vernachlässigbarer Rückwirkung* ermöglicht. Dabei bietet sich unter verschiedenen möglichen Konzepten insbesondere die Verwendung von Hohlraumresonatoren⁶ an, da diese bezüglich der Signalstärke anderen Monitortypen überlegen sind⁷ ([Klu94], S. 14). In Abbildung 1.2 ist eine Ausschnittsvergrößerung des Übersichtsplans dargestellt, in der die beiden für den Einbau der Lagemonitore vorgesehenen Stellen eingezeichnet sind. Außerdem ist der neue Einbauort eines bestehenden Intensitätsmonitors markiert, welcher, wie im Laufe der Arbeit ausgeführt werden wird, für die absolute Kalibrierung der Lagemessung erforderlich ist.

⁴Ein Dipolmagnet mit vertikalem Magnetfeld, dessen Richtung sich über Tausch der elektrischen Anschlusspole umdrehen lässt. Die Teilchen werden je nach Einstellung nach links oder nach rechts abgelenkt.

⁵Im Falle der Detektortests, wo der Strahl hinter dem Experiment noch aus Elektronen besteht, kann sie allerdings für die dortige Strahlagemessung zum Einsatz kommen.

⁶Zur Bezeichnung eines Hohlraumresonators wird auch häufig der englische Begriff „cavity“ verwendet.

⁷Dieser Vorteil lässt sich allerdings nur sinnvoll nutzen, wenn, wie im vorgesehenen Einsatzfall, der Strahl den Resonator nicht viele Male durchqueren muss. Beispielsweise würden beim Betrieb in einem Ringbeschleuniger die im Resonator herrschenden Felder den Strahl zu sehr beeinflussen.

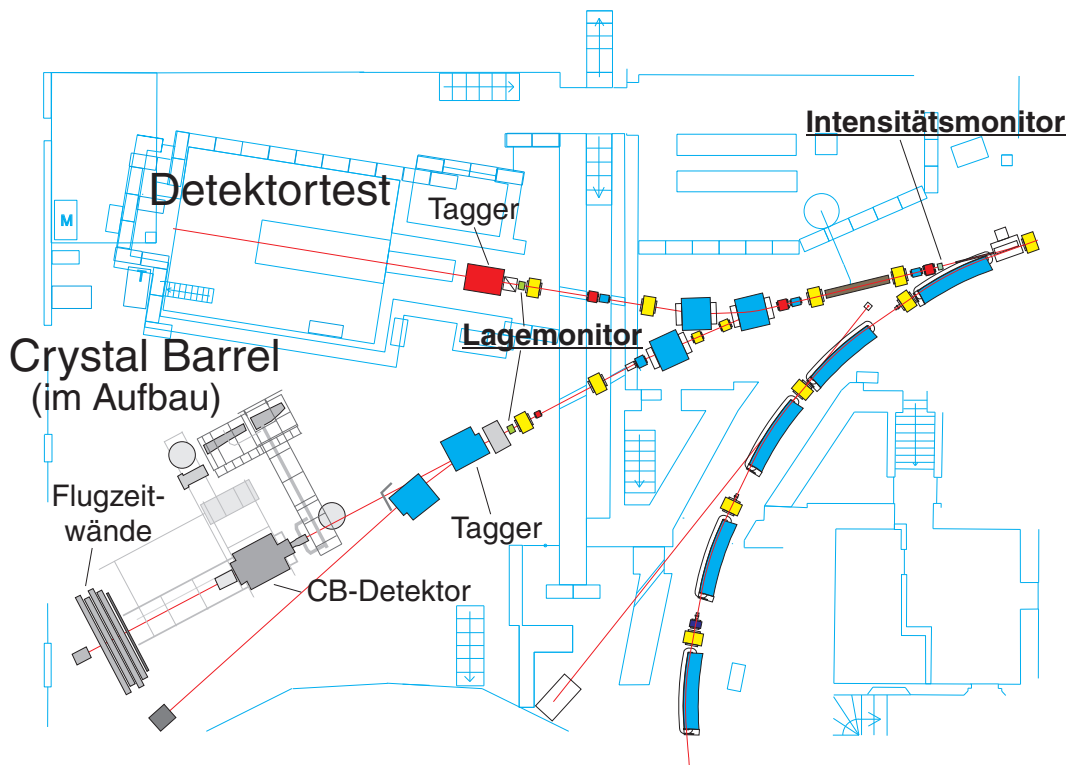


Abbildung 1.2: Die externe Strahlführung des Elektronenbeschleunigers, die zwei Lagemonitore und der Intensitätsmonitor sind an den für sie vorgesehenen Stellen eingezeichnet.

1.2 Strahllagemessung mittels Hochfrequenzresonatoren

Um Informationen über die Lage des Elektronenstrahls zu erhalten, kann man sich die Tatsache zu Nutze machen, dass die beschleunigten Elektronen in kleinen Paketen, den sogenannten „Bunches“ vorliegen. Die Rate, mit der diese im Strahl aufeinanderfolgen, ist durch die zur Beschleunigung verwendete Hochfrequenz⁸ gegeben. Diese ist bei ELSA auf 499,67 MHz festgelegt, wird aber bei Bedarf zur Anpassung an die durch die Magnetoptik vorgegebene Bahnlänge etwa im Promillebereich variiert.

Stellt man nun einen Hochfrequenzresonator geeigneter Dimensionen und, der vorliegenden Symmetrie gemäß, zylindrischer Bauart in den Strahlweg, so regen die durchlaufenden Elektronenpakete stehende Wellen an. Deren Feldverteilung in der Ebene des Strahlquerschnitts kann durch geeignete Wandstrukturen innerhalb des Resonators so beeinflusst werden, dass sie eine Vorzugsrichtung aufweist. Die Felder sind dann bezüglich einer feldfreien Symmetrieebene antisymmetrisch, wodurch eine entsprechende Ablage des Strahls zur einen oder anderen Richtung hin eine entsprechende Phase des angeregten Feldes relativ zur Beschleuniger-HF bewirkt.

Koppelt man nun mittels einer am Resonatordeckel angebrachten und dort vom Wechselfeld beeinflussten Koppelantenne einen Teil der Hochfrequenzleistung aus, so erhält man ein Signal, dessen Amplitude und Phase Aufschluss über die Strahlablage geben.

Grundsätzlich sind folgende Dinge zu beachten:

- Da es in dem Resonator nur eine einzige für die Messung relevante Ebene gibt, bezüglich

⁸Im Folgenden findet sich häufig die Abkürzung HF.

derer die Felder antisymmetrisch liegen, ist er nur in einer Richtung empfindlich. Für eine vollständige Positionsbestimmung innerhalb der zum Strahl senkrechten Ebene sind also zwei Resonatoren erforderlich, welche gegeneinander um 90° verdreht sind.

- In der oben erwähnten Feld- und Auskopplungskonfiguration ist das erhaltene Signal proportional zum Quadrat der Strahlablage sowie zum Quadrat des Strahlstromes – für eine absolute Positionsbestimmung wird das Messsignal also auf die zum gleichen Zeitpunkt herrschende Strahlintensität bezogen werden müssen. Letztere soll in diesem Fall mit Hilfe eines zu einem früheren Zeitpunkt schon für diesen Zweck gebauten Resonators gemessen werden.

Im Folgenden soll nun zunächst das zum Verständnis der physikalischen Vorgänge im Messaufbau erforderliche Grundlagenwissen zusammengestellt werden, bevor dann die praktische Umsetzung dieser Kenntnisse in ein System zur Strahllagemessung beschrieben werden kann. Insbesondere geht es um folgende Fragestellungen:

- Wie wird das gewünschte Lagesignal in dem Hohlraumresonator erzeugt?
- Welche geometrische Struktur muss dieser zur Erfüllung seines Verwendungszwecks aufweisen?
- Wie muss die Ausleseelektronik gestaltet werden, die das Signal für die letztendliche Anzeige im Beschleuniger-Kontrollsystem aufbereitet?

2 Die Struktur des Elektronenstrahls

Ziel der Untersuchung ist die Bestimmung der Lage des Elektronenstrahls. Dessen Zeitstruktur, nämlich die Aufteilung in Elektronenpakete, soll zur Anregung stehender Hochfrequenzwellen in Resonatoren genutzt werden.

2.1 Aufteilung in Elektronenpakete

Die Bunchstruktur des Strahls ergibt sich zwingend durch die Art der Beschleunigung: Ein hochfrequentes Wechselfeld innerhalb der im Strahlweg stehenden Beschleunigungsresonatoren wirkt abwechselnd beschleunigend und bremsend auf Teilchen, die sich im Resonator aufhalten. Das Wegintegral der Teilchenbahn über das zeitlich variierende, longitudinale⁹ elektrische Feld ergibt die von einem Elektron im Resonator durchlaufene Potentialdifferenz U .

Je nach Einschusszeitpunkt trifft ein Teilchen auf eine andere Phase Ψ der wegen des zu Grunde liegenden Wechselfeldes sinusförmigen Potentialdifferenz $U = U_0 \sin \Psi$, der Wert $\Psi = 0$ liegt in deren aufsteigendem Nulldurchgang. Der Energiegewinn pro Umlauf lautet dann:

$$E = eU_0 \sin \Psi - W \quad . \quad (2.1)$$

Vom maximal möglichen Gewinn gehen hier die bei einem Elektronenbeschleuniger stark durch den Anteil der Synchrotronstrahlung dominierten Energieverluste W ab, zu deren Kompensation fast die gesamte Beschleunigungsenergie aufgewendet werden muss¹⁰ ([Wil92], S. 201).

Die Magneto-optik des Beschleunigerrings legt eine sogenannte *Sollbahn* fest: Für ein sich auf ihr befindendes Teilchen definiert man die sogenannte *Sollphase* Ψ_s , beim Durchlaufen des Resonators wird es dann die Energie

$$E_s = eU_0 \sin \Psi_s - W_s \quad (2.2)$$

gewinnen, welche per Definition genau ausreichen muss, um das Teilchen auf der Sollbahn zu halten.

In Abbildung 2.1 ist die von einem Teilchen durchlaufene Potentialdifferenz als Funktion seiner Phase Ψ aufgetragen. Teilchen, die eine Impulsdifferenz Δp zum Sollimpuls p aufweisen, treffen nicht bei der Sollphase Ψ_s im Resonator ein. Beispielsweise ist die Bahn eines Teilchens mit einem kleineren Impuls als p , also einer *relativen Impulsabweichung* $\Delta p/p < 0$, gegenüber der Sollbahn weiter nach Innen verschoben. Es kommt deshalb etwas früher als das Sollteilchen am Resonator an¹¹, gemäß Abbildung 2.1 erfährt es dann eine höhere Spannung U . Damit wird sein Impuls im Vergleich zum Sollteilchen um einen größeren Betrag angehoben, Δp und damit auch die Phasendifferenz $\Delta \Psi$ sinken.

Abweichungen von der Sollphase werden also kompensiert, man spricht von der sogenannten *Phasenfokussierung*: Die Teilchen werden in longitudinaler Richtung zu Paketen verdichtet, man spricht von *Bunches*. Eine Reihenentwicklung der Spannung U um die Sollphase Ψ_s kann für kleine Auslenkungen $\Delta \Psi$ nach dem linearen Term abgebrochen werden, wegen der linearen Rückstellkräfte führen die Teilchen also harmonische Phasenschwingungen um die Sollphase durch. Man spricht hierbei von den sogenannten *Synchrotron-schwingungen* mit der Frequenz Ω_s .

Wegen (2.1) geht mit der Phasenschwingung auch eine um $\pi/2$ phasenverschobene Schwingung im Energiegewinn E einher, welche sich dann in einer Schwingung

⁹parallel oder antiparallel zur Strahlrichtung

¹⁰Auf weitere Effekte, die zum Energieverlust führen, soll hier nicht eingegangen werden (siehe z.B. [Hin97], S. 286).

¹¹Dies gilt für die ultrarelativistischen ($v \approx c$) Teilchen in einem Elektronenbeschleuniger: Eine Impulsänderung wirkt sich in vernachlässigbarem Maße auf die Geschwindigkeit aus.

von $\Delta E = E - E_s$ fortsetzt¹². Im Phasenraum, also einer Darstellung der $(\varphi, \Delta E)$ -Ebene, nimmt der zeitliche Verlauf der Synchrotron-Schwingungen die vom harmonischen Oszillator bekannte Form einer Ellipse an. Für größere Schwingungsamplituden kann die Näherung durch ein Oszillatorpotential allerdings nicht aufrecht erhalten werden. Es treten Nichtlinearitäten auf und jenseits einer *Separatrix* genannten Kurve im Phasenraum ist keine stabile Schwingung mehr möglich. Ein Teilchen, dessen Schwingungsamplitude über diese Separatrix hinausgeht, geht dem Strahl verloren (vgl. [Hin97], S. 287f).

Im Englischen findet man für den stabilen Bereich innerhalb der Separatrix den Begriff „Bucket“. Wegen der Periodizität der Hochfrequenz ist die Sollbahn nun mit Buckets angefüllt, jeweils um eine Wellenlänge der Hochfrequenz voneinander entfernt. Der Bereich innerhalb eines solchen „Eimers“, welcher tatsächlich mit Elektronen angefüllt ist, wird dann als *Bunch* bezeichnet. Statistisch definiert wird er über die Standardabweichung der Schwingungsamplitude, also als das Phasen- bzw. Energiegewinn-Intervall, innerhalb dessen sich etwa 68% der Teilchen eines Bunches finden lassen.

Im folgenden Abschnitt soll nun die Dichteverteilung innerhalb eines Bunches untersucht werden, wobei die zu Grunde liegende Synchrotronschwingung der Teilchen gemäß der erwähnten Näherung für kleine Auslenkungen als harmonisch betrachtet wird.

2.2 Die longitudinale Teilchendichte eines Bunches

Es zeigt sich, dass die Struktur eines Bunches, namentlich seine Dichteverteilung, im Falle eines Elektronenbeschleunigers die Form einer Gaußfunktion annimmt, vgl. Abbildung 2.2. Die longitudinale Elektronendichteverteilung innerhalb eines Bunches lässt sich als Funktion der Zeit t darstellen. Dem Sollteilchen ist dabei $t = 0$ zugeordnet, endliche Werte von t geben die zeitliche Abweichung der Bunch-Elektronen hiervon an ([San70], S. 124ff.). Die Gaußkurve

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\epsilon a} e^{-\frac{(at)^2}{2\sigma_\epsilon^2}} \quad (2.3)$$

¹²Wenn ein Teilchen den Umkehrpunkt seiner Phasenschwingung erreicht hat, so ist seine Phasendifferenz maximal. Gleichzeitig unterscheidet es sich aber in diesem Fall in seiner Energie nicht vom Sollteilchen, $\Delta E = 0$.

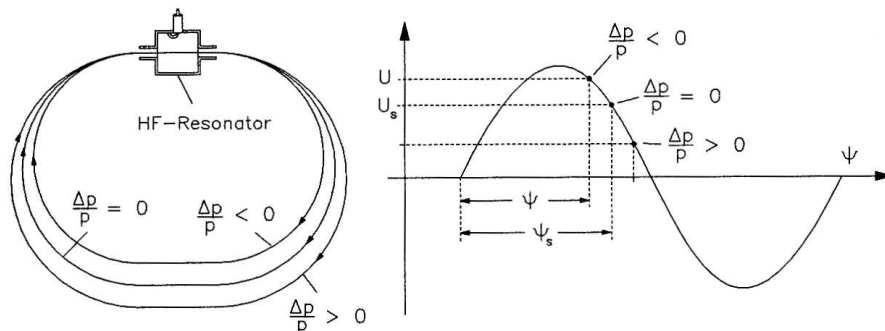


Abbildung 2.1: Die Abbildung zeigt die Beschleunigungsspannung in Abhängigkeit von der Phase Ψ . Für relative Impulsabweichungen $\Delta p/p \neq 0$ weichen die Teilchen wegen ihrer veränderten Bahnlänge dabei von der Sollphase Ψ_s ab. Sie erfahren dann eine von der des Sollteilchens verschiedene Beschleunigungsspannung, welche der Phasendifferenz entgegenwirkt ([Wil92], S. 201).

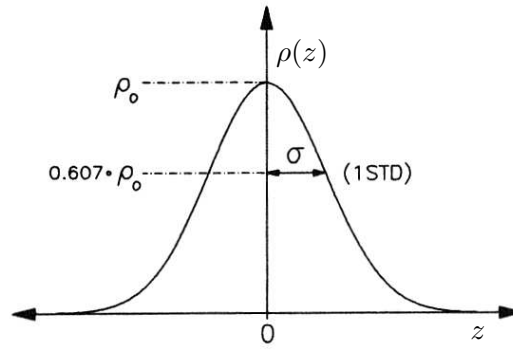


Abbildung 2.2: Die Struktur einer Gaußkurve, hier am Beispiel der *longitudinalen* Teilchendichte $\rho(z)$ eines Bunches, die Standardabweichung (*STD*) ist mit σ bezeichnet (vgl. [Wil92], S. 93).

stellt das longitudinale Dichteprofil eines Bunches in zeitlicher Parametrisierung dar, die Größe σ_ε steht dabei für die *Standardabweichung* der um den Sollwert streuenden Teilchenenergien.

Der die letztendliche Breite der Kurve mitbestimmende Skalierungsfaktor a setzt sich dabei aus den folgenden, für den Strahl charakteristischen Parametern zusammen:

$$a = \frac{\Omega E_0}{\alpha} . \quad (2.4)$$

Hier steht Ω für die Frequenz der Synchrotronschwingung, E_0 für die Sollenergie der Teilchen und α für den sogenannten *Momentum-Compaction-Faktor*. Dieser gibt das Verhältnis von relativer Bahnlängenänderung $\Delta L/L$, die sich durch die unterschiedlichen Energien bzw. Impulse der Teilchen ergibt, zur relativen Impulsänderung $\Delta p/p$ eines Teilchens an ([Wil92], S. 87). Zur Ladungsdichteverteilung lässt sich die zunächst noch normierte Gaußkurve (2.3) dann mittels Multiplikation mit der Gesamtladung eines Bunches vervollständigen, dem Produkt aus N , der Zahl der in einem Bunch enthaltenen Elektronen, und der Elementarladung e .

Weiterhin gilt, dass σ_τ , die zeitliche Standardabweichung der Dichteverteilung, über den Skalierungsfaktor a von der entsprechenden Energie-Standardabweichung σ_ε abhängt ([San70], S. 129):

$$\sigma_\tau = a^{-1} \sigma_\varepsilon = \frac{\alpha}{\Omega E_0} \sigma_\varepsilon . \quad (2.5)$$

Innerhalb des Zeitintervalls $2 \cdot \sigma_\tau$ halten sich also, gemäß der statistischen Definition (z.B. [BS99], S. 784), etwa 68 % aller Teilchen eines Bunches auf.

Für eine Abschätzung der oberen Grenze von σ_τ bei hohen Energien kann man nun die entsprechenden Parameterwerte, welche bei der Maximalenergie des Beschleunigers von $\approx 3,5$ GeV auftreten, einsetzen. Hier ist ein Momentum-Compaction-Faktor α von etwa 5% typisch, die relative Energieabweichung σ_ε/E_0 beträgt ca. 0,09%. Da die Teilchen etwa 0,04 Synchrotronschwingungen pro Umlauf ausführen¹³ und eine Umlauffrequenz von 1.823,58 kHz aufweisen, erhält man aus dem Produkt dieser beiden Werte, ergänzt um einen Faktor 2π , die Kreisfrequenz der Synchrotronschwingung Ω . Diese ergibt sich zu etwa 73 kHz¹⁴, als Ergebnis für σ_τ erhält man 98 ps.

¹³Dieser Wert wird auch als *Synchrotron-Arbeitspunkt* Q_S bezeichnet.

¹⁴Insbesondere die Größe Ω hängt stark vom der betrachteten Beschleunigereinstellung ab, weswegen der angegebene Wert nur stellvertretend für eine ganze Reihe möglicher Konfigurationen angegeben wurde. Im Allgemeinen liegt die für den Wert von Ω entscheidende Anzahl der Synchrotronschwingungen pro Umlauf in der Größenordnung von einigen Hundertsteln.

Von dieser zeitlichen Größe kann man nun zu einer räumlichen übergehen, indem man (2.5) mit der Teilchengeschwindigkeit multipliziert. Letztere kann mit der Lichtgeschwindigkeit c angesetzt werden, da die Geschwindigkeit der Elektronen in ELSA erst in der Größenordnung von 10^{-11} von ihr abweicht. Man erhält dann die sogenannte *natürliche Bunchlänge* σ_0 , welche die Standardabweichung von der Sollposition im Bunch angibt. Aus 98 ps Zeitausdehnung werden dann knapp 3 cm im Raum.

Da die Dichteverteilungskurve zwei Standardabweichungen breit ist (vgl. Abbildung 2.2), erhält man für die tatsächliche Bunchlänge l_B einen Wert von etwa 6 cm. Dies ist als ungefähre Abschätzung der energetisch bedingten Obergrenze zu verstehen, für Endenergien von 1–2 GHz ergeben sich Werte um 4 cm. Schließlich bleibt noch die Feststellung, dass die eigentliche Ausdehnung der Elektronenwolke über die angegebene Standardabweichung hinausreicht, es sind ja nur 68% aller Teilchen innerhalb von $2\sigma_0$ bzw. $2\sigma_\tau$ zu finden.

2.3 Der Einfluss der Bunchstruktur auf das Anregungsspektrum

Es stellt sich die Frage, welchen Einfluss die Struktur der Bunche auf das Frequenzspektrum haben wird, über welches stehende Wellen in einem Hohlraumresonator angeregt werden können. Dabei kann man, von der idealisierenden Annahme ausgehend, dass sämtliche Ladungen eines jeden Bunches auf einen Punkt konzentriert sind, schließlich auf die Wirkung des ausgedehnten Bunches auf die Felder im Resonator verallgemeinern. Dies soll im Rahmen der folgenden Darstellung erörtert werden (vgl. [Klu94], S. 18).

Wenn man den einzelnen Bunch in der erwähnten Form als Punktobjekt vereinfacht, so lässt sich die mit der Zeit t parametrisierte *idealisierte* Linienladungsdichte des Strahls als Summe von δ -Funktionen formulieren, welche auf der Zeitachse um jeweils eine Periode T_{HF} der Hochfrequenz auseinanderliegen¹⁵

$$\lambda(t) = N e \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \delta(t - j \cdot T_{\text{HF}}) . \quad (2.6)$$

Das Produkt der Elementarladung e mit der Elektronenzahl N eines Bunches gibt dessen Gesamtladung an, wobei hier vom Idealfall identischer Bunche ausgegangen wird. Nun ist für die Anregung stehender Wellen im Resonator das Frequenzspektrum der ihn passierenden Bunche interessant. Dieses gewinnt man mittels der Fouriertransformation \mathcal{F} , welche die mit (2.6) gegebene zeitabhängige Ladungsdichte $\lambda(t)$ in ihre Frequenzdarstellung $\Lambda(\nu)$ überführt (siehe z.B. [Ach78], S. 46):

$$\Lambda(\nu) = \left(\mathcal{F}(\lambda(t)) \right) (\nu) = \frac{N e}{T_{\text{HF}}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\nu - k \frac{1}{T_{\text{HF}}}\right) . \quad (2.7)$$

Der Kehrwert der Periodendauer T_{HF} entspricht der Beschleuniger-Hochfrequenz ν_{HF} . Das Frequenzspektrum der idealisierten Ladungsdichte (2.6), deren mathematische Gestalt auch als *Dirac-Kamm* bezeichnet wird, weist also Linien im Abstand der Hochfrequenz auf:

$$1 \nu_{\text{HF}}, 2 \nu_{\text{HF}}, 3 \nu_{\text{HF}}, \dots .$$

Jede dieser Linien ließe sich nun für die Anregung einer in ihrer Frequenz durch die Resonatorgeometrie darauf abgestimmten Mode verwenden.

¹⁵Dies ist nur bei einer homogenen Füllung des Ringes der Fall, im Allgemeinen muss nicht notwendigerweise jedes „Bucket“ auch gefüllt sein.

Nun ist allerdings noch zu berücksichtigen, dass die *reale* Linienladungsdichte $\lambda_r(t)$ nicht aus δ -Funktionen, sondern aus den mit (2.3) gegebenen Gaußfunktionen $g(t)$ zusammengesetzt ist:

$$\lambda_r(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} Ne g(t - j T_{\text{HF}}) . \quad (2.8)$$

Dieser Zusammenhang lässt sich als Faltung der idealisierten Linienladungsdichte $\lambda(t)$ mit der Funktion $g(t)$ darstellen. Dazu führt man in (2.8) ein Integral über die δ -Funktion des Dirac-Kamms aus (2.6) ein:

$$\begin{aligned} \lambda_r(t) &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Ne \delta(\tau - j T_{\text{HF}}) g(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda(\tau) g(t - \tau) d\tau = \lambda(t) * g(t) . \end{aligned} \quad (2.9)$$

Da die Fouriertransformation einer Faltung dem Produkt der fouriertransformierten Einzelfunktionen entspricht ([Ach78], S.17f), erhält man als Lösung die idealisierte Ladungsdichte (2.7), multipliziert mit der Fouriertransformierten $G(\nu)$ der Gaußfunktion. Die Grundstruktur einer solchen ändert sich unter der Transformation nicht, es ergibt sich ([BS99], S.1071):

$$G(\nu) = \frac{1}{2a^2} e^{-2\pi^2 \nu^2 \frac{\sigma_\varepsilon^2}{a^2}} . \quad (2.10)$$

Für den Zweck der Lagemessung im Resonator ist nun insbesondere die Exponentialfunktion interessant: Aus ihr lässt sich ableiten, um wieviel schwächer die Anregung des Resonators bei der n -ten Harmonischen der Beschleuniger-Hochfrequenz ν_{HF} gegenüber dem Maximum bei $\nu = 0$ Hz ausfällt. Ersetzt man nun in (2.10) die Energie-Standardabweichung σ_ε mittels (2.5) durch σ_τ , so erhält man für die als *Bunchfaktor* B definierte Exponentialfunktion:

$$B(\nu) = e^{-2\pi^2 \nu^2 \sigma_\tau^2} . \quad (2.11)$$

Wie in Abschnitt 3.3 besprochen wird, fallen die Abmessungen eines Resonators um so größer aus, je kleiner die gewünschte Resonanzfrequenz gewählt wird. Die Kenntnis des Bunchfaktors für die möglichen Anregungsfrequenzen erlaubt es, einen Kompromiss zwischen Signalstärke und Resonatorabmessungen zu finden (vgl. Abschnitt 4.2). Außerdem wird der Wert von B gemäß (3.36) für die Berechnung der absoluten Signalstärke benötigt.

3 Theorie der Hohlraumresonatoren

Zur Bestimmung der Lage des Elektronenstrahls sollen Hohlraumresonatoren zum Einsatz kommen. Dabei wird die Tatsache genutzt, dass sich in einem Hohlraumresonator bei bestimmten Frequenzen, welche von seiner Geometrie abhängen, unter Anregung durch entsprechende elektromagnetische Felder stehende Wellen ausbilden können. Dies führt zu einer resonanzartigen Überhöhung der Feldstärken, was die Messung eines aus dem Resonators ausgekoppelten Signals vereinfacht. Die Resonanzfrequenzen des Hohlraums werden als *Eigenschwingungen* oder *Moden* bezeichnet.

3.1 Die Resonatormoden

Wenn der Elektronenstrahl des Beschleunigers durch eine geeignet konstruierte zylindrische Kavität parallel zu ihrer Achse hindurchtritt, so bewirkt die im vorigen Abschnitt ermittelte und durch (2.8) gegebene periodische Linienladungsdichte λ_r eine in Frequenz und Amplitude durch (2.10) charakterisierte Anregung von bestimmten Feldverteilungen im Resonator.

Welche Feldgeometrien dabei möglich sind und welchen Wert die jeweils zugehörige Eigenfrequenz hat, lässt sich durch das Lösen der maxwellschen Gleichungen bzw. der aus ihnen abgeleiteten Wellengleichung unter der Randbedingung leitender Wände ermitteln. Dabei kann zunächst die Wellenausbreitung im zylindrischen Hohlleiter betrachtet werden (siehe die Abschnitte A.1.1–A.1.4 im Anhang). Der Resonator ergibt sich dann, wie in Abschnitt A.1.5 beschrieben, mittels der Einführung zusätzlicher Randbedingungen: Das Rohr wird an beiden Enden mit leitenden Platten abgeschlossen.

Die Resonatormoden lassen sich in zwei Klassen einteilen, die sich jeweils durch die rein transversalen¹⁶ elektrischen (transversal elektrische oder kurz TE-Moden) bzw. magnetischen (TM-Moden) Felder auszeichnen. Die jeweils andere Feldkomponente ist dabei nicht eingeschränkt. Die Bezeichnungen der Resonatoreigenschwingungen beider Klassen sind mit Indizes versehen, die jeweils Auskunft über die Anzahl der Halbbögen (n, p) oder vollen Wellenlängen (m) der stehenden Wellen (und damit der Feld-Nulldurchgänge) in einer der drei Koordinatenrichtungen geben (vgl. Abschnitt A.1.4 und A.1.5). Bei zylindrischen Resonatoren, wie sie hier betrachtet werden, sind dabei die Indizes m, n, p den in diesem Fall verwendeten Zylinderkoordinaten φ, r und z zugeordnet.

3.2 Interessante Resonatormoden für die Beschleunigerphysik

In der Beschleunigerphysik sind nun insbesondere TM-Moden interessant, da sie im Falle $p = 0$ über ein achsparalleles, in z -Richtung konstantes elektrisches Feld verfügen, welches damit parallel zum Strahlstrom verläuft. In dieser Konfiguration ist ein Energieaustausch zwischen Strahl und Feld besonders gut möglich: In der einen Richtung zu Teilchenbeschleunigung, in der anderen zur Strahl diagnosis.

Wegen seiner Bedeutung für die Anwendung wird an dieser Stelle, als Ergebnis einer entsprechenden elektrodynamischen Betrachtung, der vollständige Ausdruck für E_z , also die longitudinale Komponente des elektrischen Feldes, für eine durch die ganzzahligen Indizes m, n und p bestimmte Mode angegeben. Einzelheiten zur Herleitung finden sich in der ausführlicheren und allgemeiner gehaltenen Darstellung im Anhang (Abschnitte A.1.1–A.1.5).

Das longitudinale \vec{E} -Feld ergibt sich aus folgendem Zusammenhang:

$$E_z(r, \varphi, z, t) = E_0 J_m\left(\frac{j_{mn}}{a} r\right) \cos(m \varphi) \cos\left(\frac{p\pi}{l} z\right) e^{i\omega t} . \quad (3.1)$$

¹⁶senkrecht zur Resonatorachse ausgerichtet

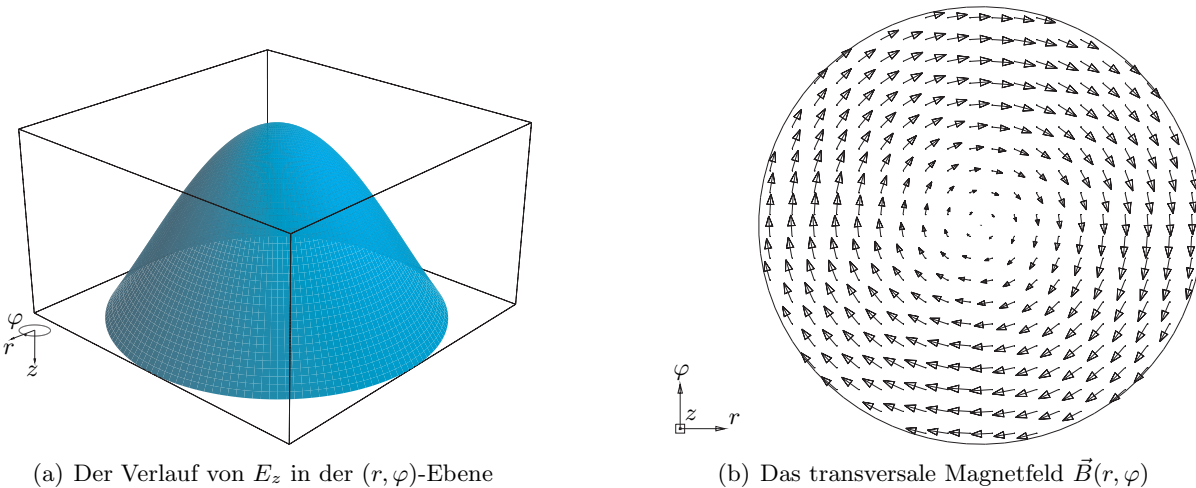
(a) Der Verlauf von E_z in der (r, φ) -Ebene(b) Das transversale Magnetfeld $\vec{B}(r, \varphi)$

Abbildung 3.1: Die Feldkomponenten der TM_{010} -Mode in der mittigen Querschnittsebene eines einfachen zylindrischen Hohlraums (Simulation mit *MAFIA* von *CST*, vgl. Abschnitt 3.9)

In diese Formel, die E_z in Abhängigkeit der Zylinderkoordinaten r , φ und z sowie der Zeit t angibt, gehen die folgenden Größen ein:

- E_0 : maximale Feldamplitude
- $J_m(r)$: Besselfunktion m -ter Ordnung
- j_{mn} : n -te Nullstelle der Besselfunktion m -ter Ordnung
- a : der Innenradius des Resonators
- l : die Länge des Resonators
- ω : die Eigenfrequenz der betrachteten Mode

Bezüglich des Verlaufs der Besselfunktionen in den ersten vier Ordnungen kann Abbildung A.3(a) herangezogen werden.

Folgende Moden sind nun von besonderem Interesse:

TM_{010} -Mode: Nach Einsetzen der Werte für m , n und p erhält man aus (3.1):

$$E_z = E_0 J_0\left(\frac{2,40482}{a} r\right) e^{i\omega t} . \quad (3.2)$$

Dabei wurde für j_{01} der Zahlenwert der ersten Nullstelle von J_0 eingesetzt (z.B. [AS72], S. 409). Das \vec{E} -Feld der Mode ist wegen fehlender φ -Abhängigkeit ($m = 0$) kreissymmetrisch, es variiert auf der Strecke des Rohrradius über eine Halbwelle ($n = 1$) von J_0 . Das Feld ist demzufolge auf der Zylinderachse besonders stark ausgeprägt ($J_0(0) = 1$) und fällt zum Rand hin bis auf Null ab ($J_0(\frac{2,40482}{a} r)|_a = 0$). Dieser Verlauf ist in Abbildung 3.1(a) zu sehen, er begünstigt die Anregung der entsprechenden Hohlraumresonator-Mode beim periodischen Durchtritt der Elektronenpakete entlang der Symmetrieachse.

Beim Einsatz im Intensitätsmonitor ist die ausgekoppelte¹⁷ Leistung proportional zum Quadrat der Stromstärke ([Klu94], S. 40), wobei die Messung sich wegen des flachen Feldverlaufs bei kleinem r relativ gutmütig gegenüber den Resonator nicht mittig passierenden

¹⁷Wie dem Resonator ein Signal entnommen wird, ist ab dem Abschnitt 3.5 dargestellt.

Teilchenstrahlen verhält. Auch zur Beschleunigung wird diese Mode eingesetzt, bei phasenrichtigem¹⁸ Einschuss erfahren die Teilchen auf der Strahlachse ein starkes, longitudinales Feld in Bewegungsrichtung.

TM₁₁₀-Mode: Hier ergibt sich nach Einsetzen der Indizes in (3.1):

$$E_z = E_0 J_1\left(\frac{3,83171}{a} r\right) \cos(\varphi) e^{i\omega t} . \quad (3.3)$$

Das Feld durchläuft in azimuthaler Richtung wegen $m = 1$ einen kompletten Zyklus des $\cos(m\varphi)$, weist also in jeweils einer von zwei Halbebenen ein unterschiedliches Vorzeichen für E_z auf. Wegen $m = 1$ hat die radiale Abhängigkeit des Feldes auf der Achse eine Nullstelle ($J_1(0) = 0$), steigert sich auf dem Weg zum Rand zunächst bis zu einem Maximum, um dann wieder zur leitenden Rohrwand hin bis auf Null abzufallen. Der Feldverlauf in der Strahlquerschnittsebene ist in Abbildung 3.2(a) dargestellt, man erkennt die zwei bergartigen Strukturen, die antisymmetrisch zu einer Achse liegen. Letztere teilt die zum Strahl senkrecht liegende Ebene in zwei Hälften auf.

Beim Einsatz in einem Lagemonitor macht man sich nun Folgendes zu Nutze: Je nachdem, durch welche Halbebene der Elektronenstrahl tritt, wird die Mode wegen des erwähnten Vorzeichenwechsels entweder gleichphasig mit der Beschleuniger-Hochfrequenz oder um 180° phasenverschoben angeregt. Zusätzlich steht mit dem in Abbildung A.3(a) zu erkennenden aufsteigenden Ast von $J_1(r)$ von der Mitte bis in die Nähe des ersten Maximums eine annähernd lineare Abhängigkeit des Feldes vom Achsenabstand zur Verfügung.

Dieser erste, lineare Anstieg bedingt nun, dass für Strahlablagen, die nicht über diesen Bereich hinausgehen, das ausgekoppelte Signal quadratisch (siehe Abschnitt 3.8) vom Abstand von der Resonatorachse abhängt. Wegen des erwähnten Vorzeichenwechsels kann man außerdem an der Tatsache, ob das Messsignal gleichphasig mit der Beschleuniger-HF läuft oder um 180° verschoben ist, ablesen, welche der beiden Halbebenen vom Strahl durchtreten wurde. Damit bietet diese Mode also die Möglichkeit, die Position des Teilchenstrahls in der Resonatorquerschnittsebene zumindest in der zur Symmetrieachse der Felder senkrechten Richtung zu messen.

Beide Moden finden nun in einem System zur Lagemessung Verwendung, da zwar die Strahlablage mit der TM₁₁₀-Mode gemessen werden kann, das gewonnene Signal aber auch vom Strahlstrom abhängt (siehe Abschnitt 3.8), dessen Messung mittels eines auf die TM₀₁₀-Mode hin konzipierten Resonators bewerkstelligt werden kann.

3.3 Zusammenhang zwischen Resonatorgeometrie und Eigenfrequenzen

In einem gegebenen Resonator können grundsätzlich unendlich viele Moden anschwingen, welche jeweils durch die drei Indizes m , n und p gekennzeichnet sind. Für einen speziellen Verwendungszweck wie die Lage- oder Intensitätsmessung ist aber nur eine bestimmte Mode interessant, welche dann auf Signale einer bestimmten Frequenz hin anschwingen soll.

Nun hängt die Resonanzfrequenz einer jeden Eigenmode von den Geometriedetails des verwendeten Resonators ab. Für einen runden Hohlleiter gilt für jede (zunächst einfach mit i durchnummerierte) Mode die Dispersionsrelation (A.11), vgl. Abschnitt A.1.3:

$$(k_i)^2 = (k_c^i)^2 - \mu\epsilon\omega^2 . \quad (3.4)$$

Dabei bezeichnen k_i und ω die Wellenzahl bzw. Kreisfrequenz der sich im Rohr ausbreitenden ebenen Welle, μ und ϵ stehen für die Permeabilitätszahl bzw. Dielektrizitätszahl des im Leiter

¹⁸Wegen des Faktors $e^{i\omega t}$ zeigen die Feldvektoren abwechselnd in oder gegen die Strahlrichtung, beschleunigen und bremsen also im Wechsel mit der Resonanzfrequenz ω .

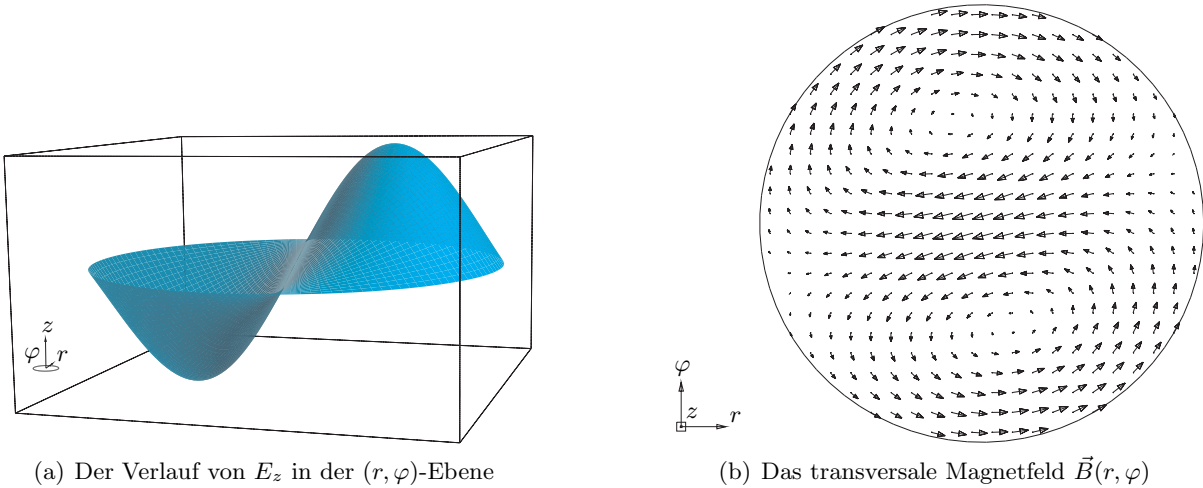
(a) Der Verlauf von E_z in der (r, φ) -Ebene(b) Das transversale Magnetfeld $\vec{B}(r, \varphi)$

Abbildung 3.2: Die Feldkomponenten der TM_{110} -Mode in der mittigen Querschnittsebene eines einfachen zylindrischen Hohlraums (Simulation mit *MAFIA*, *CST*)

enthaltenen Mediums. Die sogenannte *Grenzwellenzahl* k_c^i ist eine für jede Mode charakteristische Größe: Unterhalb der zu ihr gehörigen Frequenz ist keine Wellenausbreitung mit dieser Mode möglich (vgl. Abschnitt A.1.3).

Beim Hohlraumresonator ergibt sich für die Wellenzahl k_i wegen der zusätzlichen Randbedingungen (leitende Wände schließen das Rohr der Länge l an beiden Enden ab, siehe Abschnitt A.1.5) die im Anhang hergeleitete Einschränkung (A.24):

$$k = p \frac{\pi}{l}, \quad \text{mit } p = 0, 1, 2, \dots \quad (3.5)$$

Man erhält dann durch Einsetzen für (3.4), wenn man nach der nun von i und p abhängenden Kreisfrequenz ω_{ip} freistellt:

$$\omega_{ip}^2 = \frac{1}{\mu\varepsilon} \left(k_c^2 + \left(\frac{p\pi}{l} \right)^2 \right) \quad (3.6)$$

Die Randbedingungen beim Hohlraumresonator legen nun auch k_c fest (vgl. Abschnitt A.1.4), es gilt die in (A.22) angegebene Abhängigkeit von der n -ten Nullstelle der (Ableitung der) Besselfunktion m -ter Ordnung, bezeichnet als $j_{mn}^{(\prime)}$ (der Inhalt der Klammern gilt für TE-Moden):

$$k_c^{mn} = \frac{j_{mn}^{(\prime)}}{a} \quad (3.7)$$

Die Größe a bezeichnet dabei den Radius des Hohlraums.

Damit kann nun auch die behelfsweise Durchnummerierung der Moden mittels des Index i aufgegeben werden: Setzt man (3.7) in (3.6) ein, so erhält man nun für die Kreisfrequenz ω_{mnp} , welche abhängig von allen drei eine Mode indentifizierenden Indizes ist, den folgenden Zusammenhang:

$$\omega_{mnp} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{\frac{j_{mn}^{(\prime)2}}{a^2} + \frac{p^2 \pi^2}{l^2}} \quad (3.8)$$

Die Eigenfrequenzen der Moden TM_{mnp} und TE_{mnp} des Resonators hängen also direkt von dessen Geometriegrößen ab, nämlich vom Radius a sowie, für $p \neq 0$, auch von der Länge l .

Quadriert man nun (3.8), geht dann mittels Teilen durch den Faktor 2π zur Frequenz ν über und multipliziert die Gleichung schließlich mit dem Quadrat des Resonatordurchmessers $d := 2a$, so ergibt sich:

$$\underbrace{\left(d\nu_{mnp}\right)^2}_y = \underbrace{\left(\frac{c j_{mn}^{(l)}}{\pi}\right)^2}_n + \underbrace{\left(\frac{c}{2}\right)^2}_m p^2 \underbrace{\left(\frac{d}{l}\right)^2}_x . \quad (3.9)$$

Dabei wurde vereinfachend das Medium im Resonator als Vakuum ($\mu = \mu_0$, $\varepsilon = \varepsilon_0$) angesetzt, wegen $c = (\mu_0\varepsilon_0)^{-1/2}$ konnte dann das Quadrat der Lichtgeschwindigkeit eingesetzt werden. Wie durch die Unterklammerung schon angedeutet, hat (3.9) die typische Gestalt $y = n + mx$ einer Geradengleichung. Der nur vom Hohlraumdurchmesser d abhängige Achsenabschnitt n stellt dabei den Grenzfall $l \rightarrow \infty$ dar, welcher den Bedingungen im unendlich langen Hohlrohr gleichkommt (vgl. [Lan64], S 160f).

Zeichnet man nun für jede Mode TM_{mnp} bzw. TE_{mnp} diese Gerade in einen Plot ein, in dem das Quadrat der mit dem Resonatordurchmesser d skalierten Resonanzfrequenz ν_{mnp} gegen das quadrierte Verhältnis von Durchmesser d zu Länge l aufgetragen ist, so erhält man eine sogenannte *Modenkarte*¹⁹, wie in Abbildung 3.3 dargestellt. Da die erste Ableitung von $J_0(r)$ der Besselfunktion erster Ordnung $J_1(r)$ entspricht, gibt es wegen der in (3.9) eingehenden Nullstelle $j_{mn}^{(l)}$ Überschneidungen bei den entsprechenden TM- und TE-Moden, im Diagramm an der etwas anderen Schattierung zu erkennen.

Aus der Modenkarte kann man für ein gegebenes Geometrieverhältnis d/l eines Resonators die Frequenz und Reihenfolge der Resonatormoden ablesen. An der vertikalen Achse erhält man dann auch die Frequenz der zugehörigen Hohlrohrmoden TM_{mn} und TE_{mn} , bei deren Klassifikation mangels longitudinaler Randbedingungen der dritte Index p fehlt, vgl. Abschnitt A.1.4.

Durch geeignete Wahl der Größen d und l kann also jede beliebige Mode in den gewünschten Arbeitsfrequenzbereich eines Resonators gerückt werden. Gleichzeitig kann man an der Modenkarte dann auch für den Fall einer in gewissem Rahmen frei wählbaren Frequenz ablesen, bei welchem d/l -Verhältnis eventuell störende Nachbarmoden den größten Frequenzabstand von der Nutzmode haben.

3.4 Der Resonator als Schwingkreis

Nachdem nun die Anregung des Resonators durch das Frequenzspektrum der Bunch-Linienladungsdichte sowie die Wahl der Resonatorabmessungen zum Erlangen einer gewünschten Arbeitsfrequenz betrachtet wurden, bleibt noch die Frage zu klären, auf welche Weise man aus einem solchen Hohlraum ein Messsignal gewinnen kann, welches die gewünschte Lage- bzw. Intensitätsinformation trägt.

Dabei hilft das Ersatzschaltbild eines Resonators: Viele seiner Eigenschaften lassen sich an Hand eines (Parallel-)schwingkreises beschreiben, dessen einzige Resonanzfrequenz dann einer der vielen Resonatormoden entspricht. Voraussetzung dafür ist, dass bei Anregung des Resonators mit Signalfrequenzen in der Nähe dieser Eigenschwingung die Nachbarmoden hinsichtlich ihrer Frequenz einen genügend großen Abstand haben, um nur in verschwindend geringem Maße mit angeregt zu werden. Diese Bedingung ist für die meisten Fälle gut erfüllt.

Die Resonanzfrequenz ω_0 eines Parallelschwingkreises kann man an der üblichen Form der Differentialgleichung für die Spannung ablesen ([Hil04], S. 79):

$$\ddot{U} + \frac{1}{RC} \dot{U} + \underbrace{\frac{1}{LC}}_{=: \omega_0^2} U = 0 . \quad (3.10)$$

¹⁹engl. „mode chart“

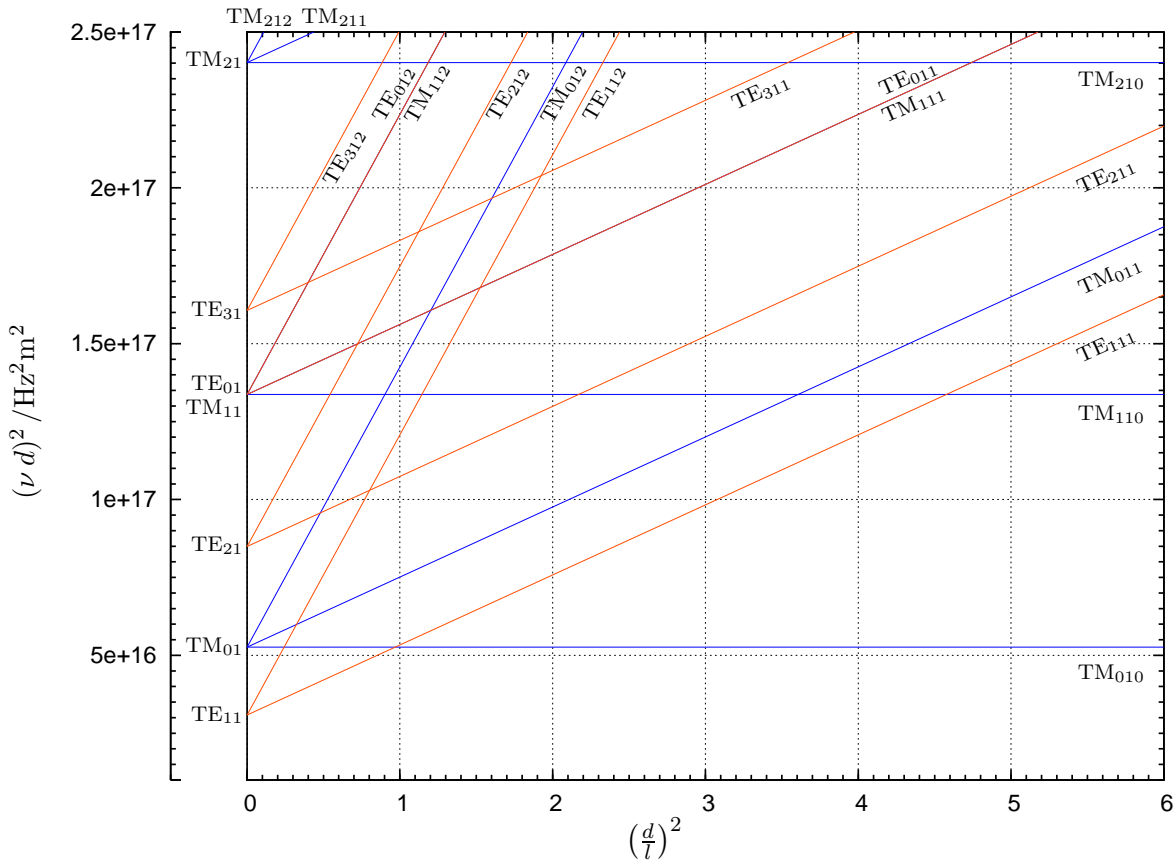


Abbildung 3.3: Ausschnitt der Modenkarte für einen kreiszylindrischen Hohlraumresonator mit Durchmesser d und Länge l , eingezeichnet sind Moden mit $p \leq 2$. An dem gemeinsamen y -Achsen-Schnittpunkt von Moden mit gleichem m und n sind die entsprechenden Hohlleitermoden TM_{mn} gekennzeichnet.

Sie wird durch die Induktivität L seiner Spule und die Kapazität C seines Kondensators bestimmt:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} . \quad (3.11)$$

Damit kann dann auch anschaulich die Gültigkeit des Ersatzschaltbildes für einen Hochfrequenzresonator verstanden werden, indem in der nun folgenden Darstellung ein Schwingkreis über einfache, die Grundstruktur erhaltende Annahmen in einen metallischen, zylindrischen Hohlraum als dessen höherfrequentes Gegenstück überführt wird (vgl. [Fey67], Kapitel 23-5). Die einfachste Form eines Schwingkreises besteht nun aus in Reihe geschalteter Spule und Kondensator, wie in Abbildung 3.4(a) dargestellt. Zur Erhöhung der Resonanzfrequenz kann man nun gemäß (3.11) C oder L verkleinern.

Wenn man sich für die Spule entscheidet, so wird die Induktivität wegen

$$L = \mu_r \mu_0 n^2 \frac{A}{l} \quad (3.12)$$

zum Beispiel durch Verringern der Windungszahl n verkleinert, was gleichzeitig auch die Länge l reduziert. Die Querschnittsfläche A geht auch ein, soll aber hier nicht weiter in Betracht gezogen werden.

Bei einem Minimum von einer einzigen Windung, also einer simplen Drahtverbindung zwi-

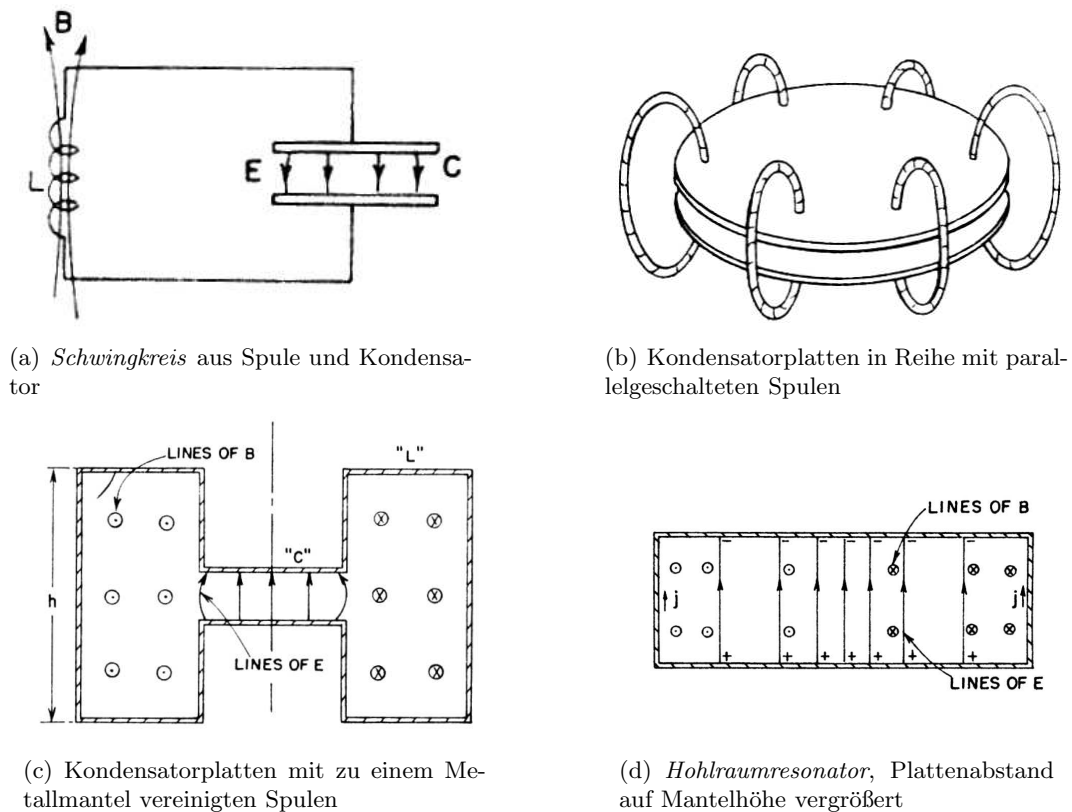


Abbildung 3.4: Der Übergang von einem Schwingkreis zu einem Hohlraumresonator unter der Maßgabe einer Erhöhung der Resonanzfrequenz ([Fey67], Kap. 23).

schen den Kondensatorplatten angelangt, verbleibt die Option, sich

$$\frac{1}{Z_{\text{ges}}} = \sum_{j=0}^N \frac{1}{Z_j}, \quad (3.13)$$

also den Zusammenhang für die Parallelschaltung von N Einzelimpedanzen Z_k (hier L_k), zu Nutze zu machen, um mit steigendem N die Gesamtinduktivität L_{ges} zu verringern.

Man kann sich dies an Hand von Abbildung 3.4(b) veranschaulichen: Die beiden Kondensatorplatten sind am Rand durch viele einfache Drahtschlingen verbunden worden. Steigert man deren gedachte Zahl ins Unendliche, so erhält man den in Abbildung 3.4(c) abgebildeten Mantel des Resonators. Schließlich wird der Abstand der Kondensatorplatten so vergrößert, dass diese sich in die nun plane Endfläche einfügen – der Hohlraumresonator in Abbildung 3.4(d) ist entstanden.

Dabei durchsetzen sich nun die ursprünglich getrennt in Spule und Kondensator aufgetretenen magnetischen und elektrischen Felder im gleichen Volumen, man erkennt die Feldverteilung der TM_{010} -Mode. Die Trennung in einen Spulen- und Kondensator-Anteil ist allerdings bei den komplexen Feldverteilungen der höheren Moden nicht mehr anschaulich möglich.

Der analog zum Schwingkreis vorhandene Stromfluss lässt sich am Beispiel der TM_{010} -Mode (vgl. Abschnitt 3.2) am Einfachsten verdeutlichen: Das longitudinale Wechselfeld zwischen den Endflächen des Resonatorzylinders, den „Kondensatorplatten“, bewirkt, dass ständig ein Strom über den Resonatormantel, also über die dicht gedrängten, parallel geschalteten „Spulenwicklungen“ fließt ([Kla76], S. 84). Wegen der endlichen Leitfähigkeit des Resonatormaterials treten

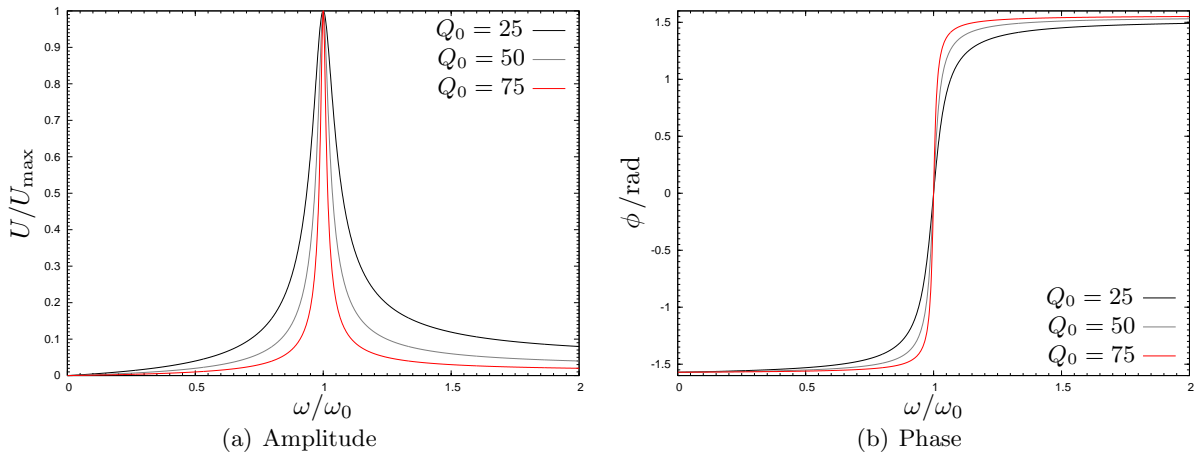


Abbildung 3.5: Auf die Maximalspannung U_{\max} normierte Resonanzkurven eines Schwingkreises für verschiedene Güten Q_0 , dazu die relative Phase ϕ zwischen Anregung und Schwingung

dabei ohmsche Verluste auf, welche den Resonator erwärmen und letztendlich zur Dämpfung der Schwingung führen.

Im Falle der hier zu untersuchenden äußeren Anregung eines Resonators muss in Gleichung (3.10) ein zusätzlicher Term auf der rechten Seite eingefügt werden:

$$\ddot{U} + \frac{1}{RC} \dot{U} + \omega_0^2 U = \frac{1}{C} \hat{I}_{\text{ext}} . \quad (3.14)$$

Diese als sinusartig angenommene Anregung soll nun mit der Frequenz ω erfolgen, weswegen die zeitabhängigen Spannungen und Ströme mit $U = \hat{U} e^{i\omega t}$ und $I = \hat{I} e^{i\omega t}$ angesetzt werden. Man erhält dann für den Scheitelwert \hat{U} der Spannung den folgenden Zusammenhang:

$$\hat{U} = \frac{R \cdot \hat{I}_{\text{ext}}}{1 + iQ_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \stackrel{\Delta\omega \ll \omega_0}{\approx} \frac{R \cdot \hat{I}_{\text{ext}}}{1 + 2iQ_0 \frac{\Delta\omega}{\omega}} . \quad (3.15)$$

Dabei wurde schon die in Abschnitt 3.6 genauer besprochene Güte $Q_0 = \omega_0 RC$ des Schwingkreises eingeführt. Für kleine Differenzen $\Delta\omega$ zwischen Anregungs- und Resonanzfrequenz ist noch die entsprechende Näherung angegeben.

Schließlich ergibt sich die Phasendifferenz ϕ zwischen Strom und Spannung über den Quotienten von Imaginär- und Realteil von (3.15) (vgl. [Hil04], S. 79; [Hil05], S. 4f):

$$\tan \phi = \frac{\text{Im } \hat{U}}{\text{Re } \hat{U}} = Q_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \stackrel{\Delta\omega \ll \omega_0}{\approx} 2Q_0 \left(\frac{\Delta\omega}{\omega} \right) . \quad (3.16)$$

Es handelt sich bei (3.15) um die mathematische Formulierung der in Abbildung 3.5(a) gezeigten Kurve. Im Resonanzfall $\omega = \omega_0$ wird die Spannung reell und nimmt ihren Maximalwert $\hat{U} = R \hat{I}_{\text{ext}}$ an, die in Abbildung 3.5(b) abzulesende Phase zwischen Strom und Spannung ist Null. Von der Resonanz fortgehend fällt die Amplitude nun um so steiler ab, je größer die Güte Q_0 ist. Gleichzeitig ergibt sich wegen (3.16) eine betragsmäßig zunehmende Phasendifferenz.

3.5 Ankopplung des Resonators an äußere Schaltungen

Um nun einen Hohlraumresonator als Messinstrument einsetzen zu können, muss man aus ihm in irgendeiner Weise ein Signal extrahieren. Grundsätzlich stellt sich die Aufgabe, im Wechselfeld

gespeicherte Energie aus dem Resonatorinnenraum heraus in die Anschlussleitung hinein zu befördern. Im Bereich der Hochfrequenztechnik bieten sich im Wesentlichen zwei Möglichkeiten zur Wellenleitung an:

- Für die meisten Zwecke reicht ein *Koaxialkabel* aus, welches das Signal im Innenleiter gegen die Masse im Außenmantel überträgt. Sein Vorteil liegt in der Biegsamkeit, es kann relativ bequem den jeweiligen Gegebenheiten angepasst werden.
- Für hohe Leistungen insbesondere bei hohen Frequenzen bieten *Hohlleiter* wegen ihrer größeren Oberfläche den Vorteil geringerer Leitungsverluste und vermeiden damit auch eine erhöhte thermische Belastung, denen entsprechende Koaxialkabel wegen des *Skin-Effekts*²⁰ insbesondere durch ihre Innenleiterverluste ausgesetzt wären ([Kla76], S.50; [Wil92], S.182). Nachteil ist die Steifigkeit der Leiterstücke, sie lassen sich in ihrer Form nicht verändern.

Je nach Einsatz dieser Leitertypen bieten sich unterschiedliche Möglichkeiten an, den Übergang zwischen Resonatorinnenraum und Zugangsleitung zu gestalten:

Lochkopplung: Für diese Art der Einkopplung geht man von einem Hohlleiter als Zuleitung aus. Dieser endet direkt auf der Resonatorwand, in die ein Loch gebohrt ist. Durch dieses können die Hohlleiterwellen in den Innenraum gelangen.

Koaxiale Einkopplung: Hier verwendet man ein Koaxialkabel zum Anschluss des Resonators. An dessen Wand ist üblicherweise ein dem Format des Kabels entsprechender Flansch angeschraubt: Es handelt sich dabei um eine kleine Platte, auf der ein zum Stecker des Kabels passendes Schraubgewinde befestigt ist. Die Platte selbst liegt plan auf der Resonatorwand auf, wo sie mittig über einer kleinen Öffnung festgeschraubt wird. In Fortsetzung des Innenleiters des Koaxialkabels kann auf der Innenseite des Flansches ein Draht montiert werden, welcher in den Hohlraum ragt. Es sollen nun hier zwei Möglichkeiten dargestellt werden, an die Felder im Hohlraum anzukoppeln:

- Der Draht ragt an einer Stelle in den Resonator, wo die Feldverteilung der zu nutzenden Mode möglichst hohe *elektrische* Felder *parallel* zum Draht aufweist. In Analogie zum elektrischen Feld im Kondensator spricht man von der **kapazitiven Einkopplung**. Im Falle der TM_{110} -Mode würde sich beispielsweise als Position für eine aus dem Deckel des Resonators ragende Antenne eines derjenigen beiden Wertepaare von r und φ anbieten, bei denen die Extrema der z -Komponente des elektrischen Feldes liegen, vgl. Abbildung 3.2(a).
- Der in den Resonator ragende Draht wird in eine Schleife zurück zum Resonatormantel gebogen, womit über das leitende Gehäuse wieder Kontakt mit dem Außenleiter des Kabels hergestellt wird. Senkrecht zur Schleifenfläche stehende *magnetische* Wechselfelder induzieren dann im Leiter eine Spannung. Da im Ersatzschaltbild an das magnetische Feld der Spule angekoppelt wird, ergibt sich die Bezeichnung **induktive Einkopplung**. Für die TM_{010} -Mode würde sich beispielsweise eine Stelle am Mantel des Resonators anbieten, wobei die Normale der Schleifenfläche in etwa parallel zu den Resonatordeckeln sowie zur Tangente an die Mantelkrümmung liegen sollte. Gemäß Abbildung 3.1(b) wird sie in einer solchen Position gut vom Magnetfeld durchsetzt.

²⁰Für hohe Frequenzen trägt nur noch ein Teil des Leiterquerschnitts zur Stromführung bei.

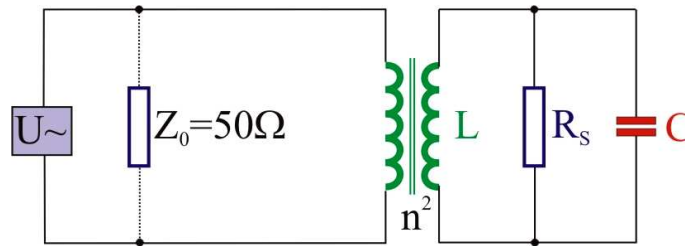


Abbildung 3.6: Der Parallelschwingkreis als Ersatzschaltbild für einen Hohlraumresonator, welcher über einen induktiv mit dem Übersetzungsverhältnis n^2 angekoppelten Signalgenerator angeregt wird ([Hil05], S. 6).

Die kapazitive Einkopplung lässt sich mechanisch einfacher bewerkstelligen als die induktive, da keine geeignet geformte Schleife hergestellt werden muss. Deshalb wird bei der Konstruktion des Lageresonators der Platzierung einer Koppelantenne im Resonatordeckel der Vorzug gegeben.

3.6 Anregung des Resonators durch eine Signalquelle

Im späteren Aufbau werden nun Signale aus dem Resonator ausgekoppelt und einer Messung zugeführt. Hier soll allerdings zunächst der umgekehrte Fall betrachtet werden: Der den Resonator darstellende Schwingkreis wird über ein induktiv eingekoppeltes Wechselspannungssignal angeregt, was zu dem in Abbildung 3.6 dargestellten Gesamtschaltbild für Resonator und Signalquelle führt. Insbesondere für die spätere Untersuchung des fertigen Resonators ist diese Sichtweise nützlich, da sich an ihr die wesentlichen Kenngrößen des Systems nachvollziehen lassen.

Die Einkopplung ist im Ersatzschaltbild durch einen Transformator symbolisiert, welcher die jeweilige Gesamtimpedanz der beiden Schaltungsteile mit dem Übersetzungsverhältnis n^2 in den jeweils anderen Teil hineintransformiert. Das führt dann bei der Untersuchung der Eigenschaften des Systems zu folgenden zwei Betrachtungsweisen:

3.6.1 Der Resonator als Abschlussimpedanz einer Wellenleitung

Aus Sicht des Generators sollen die elektromagnetischen Felder möglichst vollständig in den Resonator eingekoppelt werden, ohne dabei reflektiert zu werden, man spricht hier von *Leistungsanpassung*. Die vom Generator erzeugte Hochfrequenz wird, um sie dem Einsatzort zuführen zu können, typischerweise in ein Koaxialkabel²¹ eingekoppelt, welches dann an einen Flansch am Resonator festgeschraubt wird.

Dieses Koaxialkabel hat dabei üblicherweise einen Wellenwiderstand von $50\ \Omega$, weswegen die Ausgangsimpedanz des Generators den gleichen Wert aufweist. Unterschiede der Impedanzen an Anschlussstellen würden nämlich zur *Reflexion* eines Teils der Wellen führen, welche sich dann in unter Umständen störender Weise in der Rückrichtung ausbreiten.

Die Koppelstelle am Resonator, also im Falle der Strahldiagnosemonitore der Flansch samt Antenne, stellt einen weiteren Übergang zwischen verschiedenen Impedanzen dar: Auf der einen Seite der Wellenwiderstand des Kabels von $50\ \Omega$, auf der anderen die Ersatzimpedanz des Hohlraumresonators von typischerweise einigen $M\Omega$. Letztere ist im Resonanzfall, wo die anregende

²¹Bei hohen Leistungen werden die Hohlleiter interessanter, da dort weniger Verluste auftreten, vgl. Abschnitt 3.5.

Frequenz ω genau die Resonanzfrequenz des Schwingkreises ω_0 trifft, reell und wird dann als *Shuntimpedanz* R_s bezeichnet. Die Ankopplung über die Antenne stellt dann den oben erwähnten Transformator dar.

Die reelle Shuntimpedanz wird von diesem mit dem Übersetzungsverhältnis n^2 heruntertransformiert, es handelt sich dann aus Sicht des Kabels um einen *Abschlusswiderstand* Z_a :

$$Z_a = \frac{R_s}{n^2} . \quad (3.17)$$

Für den Zweck idealer Übertragung der Energie in den Resonator darf keine Reflexion auftreten, die Abschlussimpedanz Z_a sollte möglichst genau dem Wellenwiderstand Z_0 des Kabels entsprechen. Ein Maß für die Güte dieser Anpassung wird durch den sogenannten *Kopplfaktor* κ erfasst (vgl. z.B. [Hil04], S. 80):

$$\kappa = \frac{Z_a}{Z_0} = \frac{R_s/n^2}{Z_0} . \quad (3.18)$$

Die folgenden drei Fälle sind möglich:

$\kappa < 1$: Bei der *unterkritischen Kopplung* ist der Ersatzwiderstand des Resonators kleiner als der Wellenwiderstand des Kabels, ein Teil der Leistung wird wegen Reflektion an der Koppelstelle in der externen Beschaltung umgesetzt.

$\kappa = 1$: Im Falle *kritischer Kopplung* liegt Leistungsanpassung vor. Wegen der Gleichheit der beiden Widerstände wird die volle Generatorleistung²² im Resonator verbraucht.

$\kappa > 1$: Liegt *überkritische Kopplung* vor, so liegt der Resonator-Widerstand über dem Wellenwiderstand, weswegen wieder Reflektion auftritt und ein Teil der Leistung nicht im Resonator umgesetzt wird.

3.6.2 Die äußere Beschaltung als zusätzliche Last im Schwingkreis

Nachdem zunächst die Situation aus Sicht des Generators betrachtet wurde, soll nun der Schwingkreis im Mittelpunkt der Überlegungen stehen, also der Resonator-Anteil der Schaltung. Die Impedanz des Generatoranteils (also der Innenwiderstand des Generators und damit auch der Wellenwiderstand der äußeren Beschaltung) wird aus dieser Sicht in den Schwingkreis mit dem Übersetzungsverhältnis n^2 als zusätzliche Last hineintransformiert.

Letztere stellt einen zusätzlichen Beitrag zur Dämpfung des Schwingkreises dar, welche nun kurz näher betrachtet werden soll. Die in den Feldern des Resonators gespeicherte Energie wird wegen des Auftretens von Wandströmen allmählich in joulesche Wärme umgewandelt. Die Abnahme beträgt für jede Zeiteinheit immer den gleichen prozentualen Anteil der im Resonator gespeicherten Energie W , weswegen sich ein Exponentialgesetz ergibt (vgl. [Kla76], S. 86):

$$W = W_0 \exp\left(-\frac{\omega_0}{Q_0} t\right) . \quad (3.19)$$

Dabei taucht hier neben der Resonanzfrequenz ω_0 eine weitere typische Kenngröße eines Schwingkreises auf, die sogenannte *Güte* Q_0 ²³.

Deren Bedeutung wird klarer, wenn man (3.19) nach der Zeit ableitet. Man erhält für sie den folgenden Ausdruck:

$$Q_0 = \omega_0 \frac{W}{-\dot{W}} = \frac{2\pi}{T} \frac{W}{P_v} . \quad (3.20)$$

²²Im Falle dämpfungsfreier Kabel

²³Auf Englisch wird die Güte als „quality factor“ bezeichnet.

Im zweiten Schritt wurde dabei neben der Periodendauer T die *Verlustleistung* $P_V = -\dot{W}$ eingeführt. Damit wird die Güte, bis auf einen Faktor 2π , zum Quotienten aus der im Resonator gespeicherten Energie W und dem Energieverlust pro Schwingungsperiode $T \cdot P_V$. Je größer also der Gütefaktor, desto kleiner die Verluste.

Im unbelasteten Kreis wird nun die durch die Verlustleistung P_V beschriebene Dämpfung alleine durch den Widerstand Z_a des Resonators verursacht. Berücksichtigt man jetzt noch, wie oben beschrieben, die zusätzliche Last des in den Resonator hineintransformierten Wellenwiderstandes $n^2 Z_0$, so ergibt sich eine zweite Verlustquelle P_{ext} , welche zu P_V hinzuaddiert werden muss. Damit ergibt sich für die vom Generator zur Verfügung gestellte Leistung P_G der folgende Zusammenhang:

$$P_G = P_V + P_{\text{ext}} \quad . \quad (3.21)$$

Zur *externen Verlustleistung* P_{ext} gehört die *externe Güte* Q_{ext} . Wegen (3.20) hängt der Gütefaktor reziprok von der dazugehörigen Verlustleistung ab, also addieren sich die Kehrwerte der einzelnen Güten zum Kehrwert der sogenannten *belasteten Güte* Q_L :

$$\frac{1}{Q_L} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_{\text{ext}}} \quad . \quad (3.22)$$

Im folgenden wird Q_0 auch als die *unbelastete Güte* des Schwingkreises bezeichnet.

Mit dem bekannten Zusammenhang für das Zeitmittel der elektrischen Leistung, welches durch

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \hat{U} \hat{I} = \frac{\hat{U}^2}{2Z} \quad (3.23)$$

gegeben ist, lässt sich eine Verbindung zwischen Impedanzen, Leistungen und damit Güten herstellen. Die Größen \hat{U} und \hat{I} bezeichnen dabei die Scheitelwerte der komplexen Ströme und Spannungen. Insbesondere kann (3.18) als Definition des Koppelfaktors κ wegen $P \propto 1/Z$ (siehe (3.23)) und $P \propto 1/Q$ (siehe (3.20)) wie folgt ergänzt werden:

$$\kappa = \frac{Z_a}{Z_0} = \frac{P_{\text{ext}}}{P_V} = \frac{Q_0}{Q_{\text{ext}}} \quad . \quad (3.24)$$

Man erkennt, dass sich im Falle kritischer Kopplung ($\kappa = 1$) die Verlustleistungen und Güten gleichen. Wegen (3.22) handelt es sich jeweils um die Hälfte der Generatorleistung bzw. belasteten Güte. Zusammen mit (3.24) lässt sich der folgende Zusammenhang herstellen:

$$Q_L = \frac{Q_0}{1 + \kappa} \quad . \quad (3.25)$$

Der Koppelfaktor bestimmt demnach, welchen Wert die Gesamtgüte Q_L des belasteten Kreises im Vergleich zur ohne äußeren Beschaltung wirksamen Güte Q_0 annimmt.

Mit den gewonnenen Ergebnissen kann jetzt die Definition des Koppelfaktors und die Interpretation der drei möglichen Fälle um neue Informationen ergänzt werden:

$\kappa < 1$: Bei der *unterkritischen Kopplung* wird in den Resonator ein im Vergleich zur Shuntimpedanz großer, zusätzlicher Lastwiderstand $n^2 Z_0$ hineintransformiert. Dies kann man (3.18) entnehmen, wenn man aus der in diesem Abschnitt eingenommenen Perspektive heraus den Übersetzungsfaktor n^2 dem Nenner Z_0 zuschlägt. Ein großer parallel geschalteter Widerstand hat wenig Auswirkungen auf den Schwingkreis, man spricht deshalb auch von *loser* Kopplung (z.B. [Kla76], S. 91). Wegen (3.25) ist die belastete Güte größer als die Hälfte der unbelasteten Güte: $Q_L > Q_0/2$.

$\kappa = 1$: Im Falle *kritischer Kopplung* ist die Leistungsanpassung vollkommen. Wegen der Gleichheit der beiden Widerstände entspricht die in der äußeren Beschaltung umgesetzte Leistung genau derjenigen im Resonator. Ebenso gleichen sich die beiden Güten der Schaltungsteile, weswegen $Q_L = Q_0/2$ gilt.

$\kappa > 1$: Liegt *überkritische Kopplung* vor, so ist der in den Resonator hineintransformierte Widerstand deutlich kleiner als die Shuntimpedanz. Die Schwingungen im Resonator werden wegen dieser zusätzlichen Verlustquelle stark gedämpft, es liegt eine *feste* Kopplung vor. Diese Tatsache spiegelt sich in der geringen Gesamtgüte der Schaltung wieder: $Q_L < Q_0/2$.

3.7 Anregung des Resonators durch einen Teilchenstrahl

Nachdem der Resonator zunächst als angeregter Schwingkreis mit festen Kenngrößen betrachtet worden ist, soll nun untersucht werden, wie er sich tatsächlich im Falle eines durch ihn hindurchtretenden Teilchenstrahls verhält. Wie sich herausstellen wird, variiert beispielsweise der Widerstand des Resonators mit dem Abstand des Strahls von der Resonatorachse. Auch muss die Geschwindigkeit der Teilchen berücksichtigt werden, die zusammen mit der Länge des Resonators deren Aufenthaltsdauer im elektrischen Feld mitbestimmt.

3.7.1 Der Resonator als von der Strahllage abhängiger Widerstand

Wenn der Resonator von einem hindurchtretenden Teilchenstrahl angeregt wird, so verhält er sich gegenüber dem Strahlstrom I wie eine Impedanz Z_s . Trifft die Anregungsfrequenz genau die Resonanzfrequenz der genutzten Mode, so handelt es sich um die rein reelle, in Abschnitt 3.6 eingeführte Shuntimpedanz R_s . Dieser Fall soll zunächst untersucht werden.

In Abhängigkeit von der Größe dieses Ersatzwiderstandes verbraucht der Strahlstrom einen kleinen Teil seiner Energie für die Anregung von oszillierenden elektromagnetischen Feldern. Die umgesetzte Verlustleistung P_v lässt sich auf folgende Art und Weise definieren, siehe auch (3.23):

$$P_v = \frac{1}{2} \hat{U} \hat{I} = \frac{\hat{U}^2}{2 R_s} = \frac{R_s \hat{I}^2}{2} . \quad (3.26)$$

Die Spannung \hat{U} entspricht dem bei optimaler Einschussphase erreichten Maximalwert vom Wegintegral des elektrischen Feldes, welches von einem Strahlelektron durchlaufen wurde:

$$\hat{U} = \int \vec{E}(r, \varphi, z, t) \cdot \vec{dz} = \int E(r, \varphi, z, t) dz . \quad (3.27)$$

Die Integrationsgrenzen erfassen dabei den vollständigen Bereich nicht verschwindender Felder, die zweite Gleichheit gilt wegen des idealerweise rein longitudinalen \vec{E} -Feldes.

Damit kann nun auch die Shuntimpedanz wie folgt angegeben werden:

$$R_s = \frac{\hat{U}^2}{2 P_v} , \quad (3.28)$$

Sie ergibt sich als Quotient des Quadrats der von einem Teilchen bei optimalem Einschuss durchlaufenen Potentialdifferenz und dem doppelten Wert der im Resonator umgesetzten Verlustleistung.

Die Größe \hat{U} hängt im Wesentlichen von zwei Parametern ab:

- Die Potentialdifferenz ist abhängig von dem auch als *Ablage* bezeichneten Abstand eines Teilchens von der Strahlachse, da die longitudinale Feldkomponente E_z dem in (3.3)

enthaltenen und in Abbildung 3.2(a) abzulesenden radialen Verlauf folgt. Es handelt sich dabei um die Besselfunktion erster Ordnung J_1 , welche durch den aufmodulierten $\cos(\varphi)$ noch eine azimuthale Abhängigkeit aufweist.

- Die *Länge* des Resonators bestimmt maßgeblich mit, wie lange die Teilchen in ihm verweilen und damit auch die Dauer des Feldeinflusses.

Wegen (3.28) gelten diese Abhängigkeiten auch für die Shuntimpedanz R_s : Der Resonator stellt einen *von der Strahlposition abhängigen* Widerstand dar und kann damit zur Lagemessung verwendet werden.

3.7.2 Laufzeiteffekte in Abhängigkeit von der Resonatorlänge

Zusätzlich ist bei der Resonator konstruktion dann noch der folgende, im vorigen Abschnitt angesprochene Effekt zu beachten: Je nach Länge des Resonators verweilt ein Teilchen für eine unterschiedliche Zeit in dessen elektrischem Feld. Ist der Hohlraum nun zu lang, so kann ihn das Elektron nicht verlassen, bevor die Feldrichtung ihr Vorzeichen gewechselt hat. Die zu erwartende Signalleistung wird damit geschmälert. Gestaltet man umgekehrt den Resonator auf eine zu kurze Länge hin, so nutzt man nicht die Zeit voll aus, in der das Feld in die richtige Richtung zeigt. Für die nahezu mit Lichtgeschwindigkeit fliegenden Elektronen entspricht dieses Zeitintervall der Strecke einer halben Wellenlänge der Resonanzfrequenz. Für ein Einzelteilchen würde der Resonator also optimalerweise eine Länge von $l \approx \lambda_0/2$ aufweisen.

Nun durchtreten die Teilchen gemäß Abschnitt 2.2 den Resonator in longitudinal ausgedehnten Paketen. Um also sowohl für die ersten als auch für die letzten Teilchen eines solchen Bunches ein in die gleiche Richtung zeigendes Feld garantieren zu können, muss die Resonatorlänge gegenüber $\lambda_0/2$ in etwa um die Länge eines Bunches vermindert werden (vgl. [Hil04], S. 41).

$$l \approx \frac{\lambda_0}{2} - l_B . \quad (3.29)$$

Die Obergrenze für l_B liegt gemäß der Abschätzung aus Abschnitt 2.2 bei etwa 6 cm, der tatsächliche Wert variiert mit dem Betriebsmodus des Beschleunigers. Bei der Monitor konstruktion sollte in Hinblick auf die Optimierung der Signalleistung Rücksicht auf (3.29) genommen werden.

3.8 Die ausgekoppelte Signalleistung

Für die Konzeption der Ausleseelektronik des Lagemonitors ist die Kenntnis der zu erwartenden Signalleistung erforderlich. Führt man also die Kopplung des Resonators an eine äußere Messschaltung ein, so ergibt sich das folgende Bild: Der Wellenwiderstand der Zuleitung Z_0 wird, mit dem Übersetzungsverhältnis n^2 erhöht, als zusätzliche Last in den Resonator-Schwingkreis eingekoppelt. Während im vorigen Abschnitt bei der Besprechung des freilaufenden Resonators noch die gesamte vom Strahl abgegebene Leistung P als Verlustleistung P_v in den Resonatorwänden umgesetzt wurde, teilt sie sich nun auf die jeweiligen Anteile P_v des Resonators und P_{ext} der Messapparatur auf. Letzterer ist ausschlaggebend für die zu erwartende Signalstärke.

Für die Ermittlung der insgesamt im Resonator umgesetzten Leistung kann man den folgenden Zusammenhang für die Wirkleistung komplexer Spannungen und Ströme heranziehen ([GV97], S. 402):

$$P = U I \cos \phi . \quad (3.30)$$

Diese fällt je nach Phasendifferenz ϕ zwischen den in diesem Abschnitt als Effektivwerte angegebenen Größen Strom und Spannung unterschiedlich stark aus.

Wenn man als Betriebsfrequenz für den Resonator allerdings eine höhere Harmonische der Beschleuniger-HF aus dem Anregungsspektrum des Strahlstroms heranzieht, so fällt bei gleichem Strom I die Signalleistung noch schwächer aus als bei der auch schon ein wenig unter dem Maximalwert liegenden Amplitude der Grundfrequenz: Der in Abschnitt 2.3 mit (2.11) eingeführte Bunchfaktor B kommt hinzu ([Mer80b], S.15):

$$P = P_v + P_{\text{ext}} = U I B \cos \phi . \quad (3.31)$$

Entscheidenden Einfluss auf die Höhe des in der äußeren Beschaltung gemessenen Signals hat die mit (3.24) gegebene und durch Gestaltung der Antenne festgelegte Koppelstärke κ . Sie ist bestimmt durch das Verhältnis der beiden Lasten des Schwingkreises und damit auch als der Quotient der zugehörigen Verlustleistungen:

$$\kappa = \frac{P_{\text{ext}}}{P_v} . \quad (3.32)$$

Mit dem Koppelfaktor κ kann man also, wenn die Verlustleistung P_v im Resonator bekannt ist, die Leistung des Messsignals errechnen.

Ersetzt man in der Leistungsbilanz (3.31) die Signalleistung P_{ext} gemäß (3.32) durch κP_v , so erhält man nach Ausklammern

$$(1 + \kappa)P_v = U I B \cos \phi . \quad (3.33)$$

Die Spannung U lässt sich mit (3.26) als Funktion der Shuntimpedanz, also der gemäß Abschnitt 3.7 entscheidenden, lageabhängigen Größe schreiben:

$$U = \sqrt{P_v R_s} . \quad (3.34)$$

Der Faktor zwei im Nenner ist hierbei wegen des erwähnten Übergangs zu den Effektivwerten der komplexen Wechselstromgrößen verschwunden. Außerdem ist hier wieder die Verlustleistung ins Spiel gekommen, so dass sich nach Einsetzen in (3.33) und Quadrieren der ganzen Gleichung folgender Zusammenhang ergibt:

$$(1 + \kappa)^2 P_v = R_s I^2 B^2 \cos^2 \phi . \quad (3.35)$$

Nun kann man mit (3.32) wieder zur gesuchten Signalleistung P_{ext} übergehen ([Mer80b], S.15; [Sch04], S.3):

$$\boxed{P_{\text{ext}} = R_s I^2 B^2 \frac{\kappa}{(1 + \kappa)^2} \cos^2 \phi} . \quad (3.36)$$

Der Phasenunterschied ϕ ist dabei durch (3.16) gegeben. Alternativ kann man aus dem Zeigerdiagramm des Schwingkreises mit einem rein reellen Eingangsspannungszeiger \hat{U} und einem um die Phase ϕ verdrehten Ausgangsspannungszeiger mit Betrag $|\hat{U}| = R_s \cdot \hat{I}_{\text{ext}}$ direkt einen Ausdruck für $\cos^2 \phi$ herleiten, man erhält mittels (3.15) für $\Delta\nu \ll \nu$ den folgenden Ausdruck:

$$\cos^2 \phi = \left(\frac{|\hat{U}|}{R_s \cdot \hat{I}_{\text{ext}}} \right)^2 = \frac{1}{1 + 4 Q_L^2 \left(\frac{\Delta\nu}{\nu_0} \right)^2} . \quad (3.37)$$

Im Gegensatz zum freilaufenden Fall steht hier anstelle der Kreisgüte Q_0 die Lastgüte Q_L , welche sich mit (3.22) und (3.24) zu $Q_L = Q_0/(1 + \kappa)$ ergibt. Der charakteristische Verlauf der Phase beim Schwingkreis lässt sich in Abbildung 3.5 ablesen. Je nach Güte verursachen Abweichungen um $\Delta\nu$ eine unterschiedlich ausgeprägte Phasendifferenz, die Signalleistung hängt

wegen des Faktors $\cos^2 \phi$ empfindlich davon ab, wie nahe die Anregungsfrequenz der Resonanzfrequenz kommt. Im Falle der Gleichheit ergibt sich das Maximum, da wegen verschwindender Phasendifferenz $\cos^2 \phi$ zu Eins wird.

Setzt man (3.37) in (3.36) ein, so ergibt sich für die Signalleistung in Abhängigkeit von der relativen Frequenzabweichung $\frac{\Delta\nu}{\nu}$ der folgende Zusammenhang:

$$P_{\text{ext}} = R_s I^2 B^2 \frac{\kappa}{(1 + \kappa)^2} \frac{1}{1 + 4Q_L^2 \left(\frac{\Delta\nu}{\nu_0}\right)^2} . \quad (3.38)$$

Wegen (3.34) ist die Shuntimpedanz proportional zum Quadrat der von den Teilchen durchlaufenen Potentialdifferenz. Diese hängt wiederum gemäß (3.27) linear von der Feldstärke ab, deren Größe wegen des über kleine Radien ebenfalls linearen Verlaufs der Besselfunktion erster Ordnung direkt proportional zur Strahlablage x (oder y , je nach Resonator) ist. Damit ist für die Shuntimpedanz eine quadratische Abhängigkeit von der Strahlablage gegeben:

$$R_s \propto x^2 . \quad (3.39)$$

Diese Abhängigkeit überträgt sich dann wegen (3.38) auch auf die Signalleistung.

Das Signal, welches aus dem Lagemonitor extrahiert wird, weist also im Wesentlichen die folgende Abhängigkeit auf:

$$\boxed{P_{\text{ext}} \propto x^2 I^2} . \quad (3.40)$$

Damit ist auch die Notwendigkeit einer Strahlstrommessung ersichtlich, auf die man das Lage-signal zur Ermittlung der Position des Strahls beziehen muss.

3.9 Das Programmpaket *MAFIA* zur Simulation von Feldverteilungen

Um einen Resonator zu konstruieren, bei dem eine auf seinen Verwendungszweck hin ausgewählte Mode bei der gewünschten Nutzfrequenz liegt, kann man in einem ersten Schritt mit (3.8) die erforderlichen Werte von Durchmesser d und Länge l ausrechnen.

Dies genügt in der Praxis aus folgenden Gründen aber nur bedingt: In die Rechnung geht die Annahme eines abgeschlossenen, ideal leitenden und exakt symmetrischen Hohlzylinders ohne innere Strukturen ein. In der Realität verwendet man Materialien mit endlicher Leitfähigkeit, außerdem will man unter Umständen durch zusätzliche Geometriedetails und Einbauten die Eigenschaften des Resonators auf seinen speziellen Einsatzzweck hin anpassen. Die vereinfachte Betrachtungsweise reicht also in vielen Fällen nicht aus, ist aber gut geeignet, um sich einen Überblick über die Größenordnungen zu verschaffen.

Um also bei einer individuellen Resonatorgeometrie die damit einhergehenden Feldverteilungen und Resonanzfrequenzen ermitteln zu können, bieten sich numerische Verfahren an. Im Rahmem dieser Arbeit kam die Simulationssoftware *MAFIA* von *CST* zum Einsatz, welche auf der *Methode der Finiten Integration*²⁴ basiert.

Sie funktioniert nach folgendem Prinzip: Zur Ermittlung der Felder im Resonator sind die Maxwellgleichungen zu lösen. Um den Rechenaufwand überhaupt in einem vertretbaren Rahmen halten zu können, ist eine Diskretisierung des Problems erforderlich. Dazu führt man ein dreidimensionales Gitternetz (engl. „mesh“) ein, welches die zu untersuchende Geometrie so genau wie möglich erfasst. Dieses lässt sich an Stellen mit Geometriedetails weiter verfeinern, und dort, wo nur eine gröbere räumliche Auflösung erforderlich ist, aufweiten.

²⁴ abgekürzt FIT für engl. „finite integration technique“

Die maxwellschen Gleichungen in ihrer integralen Form, ursprünglich gültig im kontinuierlichen \mathbb{R}^3 , lassen sich nun eins zu eins in die *maxwellschen Gittergleichungen* überführen, welche für ein sogenanntes Gitterraum-Dublett $\{G, \tilde{G}\}$ formuliert werden.

Für jeden der darin insgesamt enthaltenen N Gitterpunkte sind dabei die elektromagnetischen Felder \vec{E} , \vec{D} , \vec{B} und \vec{H} sowie die Stromdichte \vec{J} als Komponenten von Vektoren gespeichert, für die dann Matrixgleichungen gelten. Materialspezifische Konstanten wie Dielektrizitätszahl ε und Permeabilitätszahl μ nehmen dann auch die Gestalt von Matrizen an (vgl. [TMC00]).

Das MAFIA-Programm löst diese Matrixgleichungen in mehreren Iterationsschritten, bis eine vorgegebene Genauigkeit erreicht wird. Als Ergebnis werden die Felder auf dem kompletten Gitter gespeichert, weswegen man aus den ermittelten Daten dann auch Größen wie die im Resonator gespeicherte Energie und die Güte berechnen kann. Weiterhin können Feldgrößen auch entlang von Linien oder über Flächen integriert werden.

4 Entwicklung des Lagemonitors

Nachdem die theoretischen Grundlagen für die Konzeption eines Hohlraumresonators gelegt worden sind, kann jetzt deren Einsatz bei dem Entwurf eines Lagemonitors in Angriff genommen werden.

4.1 Wahl und Stabilisierung der Resonator-Mode

Zur Lagemessung mit einem Hohlraumresonator eignet sich wegen ihrer besonderen Feldstruktur insbesondere die Dipolmode²⁵ TM_{110} (siehe Abschnitt 3.2).

Allerdings kann diese in einem kreiszylindrischen Resonator wegen der Symmetrie in beliebiger Richtung anschwingen. Um den Resonator kontrolliert zur Messung einer bestimmten Richtung verwenden zu können, muss durch das Ergänzen von zusätzlichen Strukturen im Resonatorinnenraum die Kreissymmetrie aufgehoben werden, man spricht dann auch von *Modentrennung*. Ziel ist es dabei, aus allen möglichen Ausrichtungen der Mode die gewünschte herauszugreifen und alle anderen in ihrer Frequenz deutlich zu verschieben, so dass sie bei der beabsichtigten Betriebsfrequenz so wenig wie möglich anschwingen.

Zur Modentrennung eignen sich zwei metallische Zylinder, die, um die Symmetrie zu wahren, an bezüglich der Strahlachse gegenüberliegenden Stellen im Resonator angebracht werden sollten. Schon an anderer Stelle sind verschiedene Konzepte realisiert worden, hier einige Beispiele:

- Zwei zylindrische Kolben werden vorgesehen, welche aus einander gegenüberliegenden Bohrungen im Mantel heraus in den Resonatorinnenraum hineingeschoben ([Mer80a], S. 2f) und dabei gleichzeitig auch zur Feinabstimmung der Resonatorfrequenz verwendet werden können.
- Je zwei Metallzylinder werden achsnah direkt bei den Strahlöffnungen der beiden Resonatorendflächen festgeschraubt, in einem am *Mainzer Mikrotron MAMI*²⁶ verwendeten Resonator weisen sie beispielsweise eine Höhe von etwa 1/6 der Resonatorlänge auf ([Mit92], S. 9). Dabei liegen sich die beiden Paare exakt gegenüber. Vorteil ist die Intensivierung der elektrischen Felder nahe der Achse (die Zylinderendflächen wirken als Kondensatorplatten, welche weniger weit entfernt sind als die Resonatordeckel), womit die Teilchen bei gleichem Strahlstrom eine höhere Potentialdifferenz durchlaufen. Wegen (3.26) und (3.27) geht damit bei gleicher Verlustleistung eine Erhöhung der Shuntimpedanz des Resonators einher.
- Zwei verhältnismäßig dünne Metallzylinder werden an Positionen in den Resonatorendflächen festgeschraubt, deren Entfernung von der Strahlachse über 90% vom Gesamtinnenradius des Hohlraums beträgt und deren Länge über 80% der Resonatorlänge ausmacht ([Sch04], S 4f). Dieses Verfahren hat gegenüber den bisher genannten den Vorteil, dass es zu einer besonders hohen Güte des Resonators führt²⁷.

Da bei einem Lagemonitor das Signal bei mittigem Durchgang des Strahls verschwindet, und bei kleinen Abständen beliebig geringe Signalleistung anfällt, fiel die Wahl wegen der besonders hohen Güte und der damit einhergehenden überlegenen Signalleistung auf das Dritte der genannten Konzepte.

²⁵Die Bezeichnung rührt von der Feldstruktur her, welche in E_z antisymmetrisch zu einer sich in z -Richtung erstreckenden Knotenebene jeweils Maxima entgegengesetzten Vorzeichens aufweist.

²⁶Ein System von als sogenannte *Racetrack-Microtrons* gestalteten Beschleunigern am Institut für Kernphysik der Universität Mainz

²⁷Aus einem persönlichen Gespräch mit Herrn Dr. Steffen Schumann, MAMI, Institut für Kernphysik, Universität Mainz

Die langen Metallzylinder nahe der Resonatorwand bewirken nun folgendes: Diejenige Ausrichtung der TM_{110} -Mode, bei der die feldfreie Symmetrieebene des E_z -Feldes genau durch die beiden Zylinder geht, wird nicht beeinträchtigt. Die dazu senkrechte Ausrichtung, die unter Beibehaltung der Symmetrie denkbar ist, wird in ihrer Frequenz nach oben verschoben, da die Zylinder sich bei ihr an Stellen befinden, wo sie Feld verdrängen. Der effektive Durchmesser des Resonators wird damit kleiner, wodurch sich wegen (3.8) die Frequenz erhöht.

4.2 Festlegung der Betriebsfrequenz des Monitors

Die bei ELSA verwendete Hochfrequenz von $\nu_{\text{HF}} = 499,67$ MHz prägt die Zeitstruktur des Teilchenstrahls, mit eben dieser Frequenz treten also Bunche durch den Lageresonator. Das bedeutet dann auch, wie in Abschnitt 2.3 beschrieben, dass bei ihr die stärkste Anregung der stehenden Wellen im Hohlraum erfolgt.

Wollte man einen Resonator bauen, dessen TM_{110} -Mode bei der Beschleuniger-HF zu finden ist, so hilft (3.8), um den für diese Frequenz erforderlichen Resonatorradius zu ermitteln:

$$\nu_{110} = \frac{c}{2\pi} \frac{j_{11}}{a} . \quad (4.1)$$

Dabei wurde (3.8) direkt durch 2π geteilt, um von der Kreisfrequenz ω zur Frequenz ν überzugehen. Weiterhin soll der Resonator im Vakuum betrieben werden, weshalb näherungsweise $\mu = \mu_0$ und $\varepsilon = \varepsilon_0$ gesetzt werden konnten. Wegen $c = (\mu_0\varepsilon_0)^{-\frac{1}{2}}$ steht in (4.1) die Lichtgeschwindigkeit c .

Stellt man (4.1) nach dem Radius um, so erhält man mit $j_{11} = 3,83171$ den folgenden Zusammenhang:

$$a = \frac{c}{2\pi} \frac{3,83171}{\nu_{110}} . \quad (4.2)$$

Durch Einsetzen von $\nu_{110} = 499,67$ MHz erhält man einen Radius von 36,59 cm. Ein Resonator mit einem Durchmesser von etwa 73 cm würde allerdings bei den gegebenen Möglichkeiten an der Beschleunigeranlage zu viel Raum beanspruchen.

Man kann sich aber die Tatsache zu Nutze machen, dass die Bunche wegen ihrer longitudinalen Ausdehnung den Resonator nicht nur in ihrer Abfolgefrequenz anregen, sondern auch bei deren ganzzahligen Vielfachen (vgl. Abschnitt 2.3). Es ist also denkbar, den Lagemonitor auf den Betrieb bei einer höheren Frequenz hin zu konzipieren, womit dann wegen (4.2) die Abmessung kleiner ausfällt.

In Tabelle 4.1 sind die erforderlichen Radien für die ersten Vielfachen der Beschleuniger-Hochfrequenz ν_{HF} angegeben. In der vorletzten Spalte findet sich der zu jeder Harmonischen gehörende Bunchfaktor. Wie in Abschnitt 2.3 dargestellt, nimmt die relative Stärke der Anregung bei höheren Frequenzen ab, da im Spektrum die schmalen, jeweils um die einfache Hochfrequenz ν_{HF} auseinanderliegenden Peaks von einer Gaußfunktion eingehüllt werden. Theoretisches Maximum wäre dann bei $\nu = 0$, der mit (2.11) gegebene Bunchfaktor B gibt das Verhältnis zu diesem Wert an. In Abbildung 4.1 ist der Verlauf von B dargestellt, die ersten ganzzahligen Vielfachen der Beschleuniger-HF sind hervorgehoben.

Weiterhin ist für die Signalleistung (3.36) noch das Maßstabsverhalten der Shuntimpedanz von Bedeutung: Die auf eine Längeneinheit normierte Shuntimpedanz \tilde{R}_s skaliert mit der Wurzel der vom Radius abhängigen Resonanzfrequenz ν_0 eines Hohlraumresonators ([Her73], S. 50). Für die Shuntimpedanz bei einer Länge l ergibt sich demzufolge

$$R_s = \tilde{R}_s \cdot l \propto \sqrt{\nu_0} \cdot l . \quad (4.3)$$

Wegen (3.29) ist die Länge des Resonators direkt proportional zur halben Wellenlänge der Eigenschwingung und damit zum Kehrwert der Frequenz. Es ergibt sich also folgender Zusammen-

n	$n \cdot \nu_{\text{HF}} / \text{MHz}$	a / cm	B	f
1	499,67	36,59	0,95	1,00
2	999,34	18,29	0,83	0,71
3	1499,01	12,20	0,65	0,58
4	1998,68	9,15	0,47	0,50

Tabelle 4.1: Aufstellung des Resonatorradius a sowie des Bunchfaktors B für den Betrieb der TM_{110} -Mode beim n -fachen der ELSA-Hochfrequenz. Weiterhin ist der in die Shuntimpedanz eingehende Skalenfaktor f aufgeführt.

hang:

$$R_s \propto \frac{\sqrt{\nu_0}}{\nu_0} = \frac{1}{\sqrt{\nu_0}} . \quad (4.4)$$

In der letzten Spalte von Tabelle 4.1 ist deshalb der Faktor f mit aufgeführt. Er ist durch

$$f := \sqrt{\frac{\nu_{\text{HF}}}{n \cdot \nu_{\text{HF}}}} \quad (4.5)$$

gegeben und stellt damit einen Skalierungsfaktor für die Shuntimpedanz bei der n -ten Harmonischen relativ zu ihrem Wert bei ν_{HF} dar.

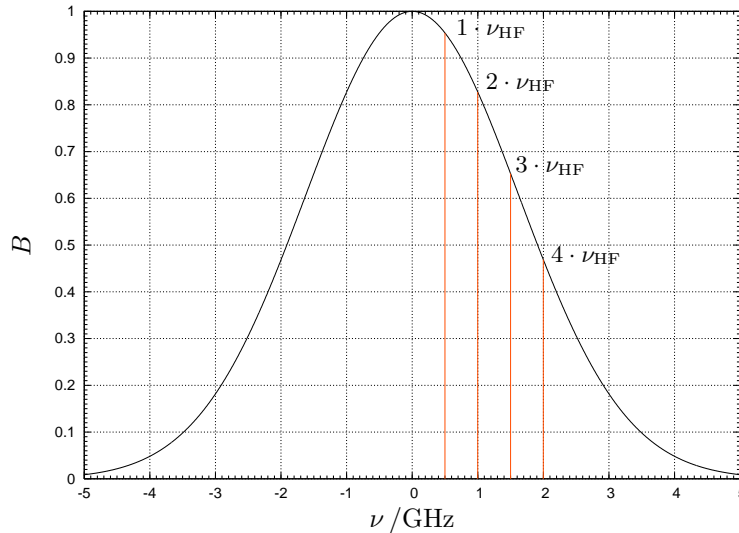


Abbildung 4.1: Das auf die Maximalamplitude normierte Fourierspektrum $\Lambda(\nu)$ der Linienladungsdichte λ_r , die ersten ganzzahligen Vielfachen der Beschleuniger-HF sind gekennzeichnet.

Wie man der Tabelle entnehmen kann, fällt der Radius mit steigender Frequenz deutlich ab. Gleichzeitig sinkt auch die Anregungsstärke in Gestalt des Bunchfaktors und für die tatsächliche Signalstärke wirkt dann auch der Skalierungsfaktor f der Shuntimpedanz mindernd.

Die räumlichen Gegebenheiten lassen die Lösung mit $n = 3$ am geeignetsten erscheinen, sie stellt den besten Kompromiss zwischen Platzbedarf und Signalstärke dar. Außerdem ist der zur Normierung des Monitorsignals zu verwendende Intensitätsmonitor ebenfalls auf diese Frequenz hin konstruiert worden. Bei einheitlicher Gestaltung des Gesamtsystems wird die Eichung der Lagemessung erleichtert: Zumindest die Geometrieabhängigkeit der Shuntimpedanz lässt sich

durch Bildung des Quotienten aus den für beide Monitortypen jeweils durch (3.36) gegebenen Signalleistungen herauskürzen.

4.3 Bestimmung der Resonatorlänge

Bei der für die Lagemessung genutzten TM_{010} -Mode ist wegen $p = 0$ keine Frequenzabhängigkeit von der Resonatorlänge gegeben, vgl. Abschnitt A.1.5. Deswegen ist Letztere im Prinzip frei wählbar, wenn man nur die Resonanzfrequenz betrachtet.

Wie in Abschnitt 3.7.2 erläutert, bestimmt aber die Länge l des Resonators, wie lange sich die mit nahezu Lichtgeschwindigkeit fliegenden Elektronen in ihm aufhalten und ein Feld erfahren. Als Empfehlung für die Wahl von l ergibt sich der hier noch einmal aufgegriffene Zusammenhang (3.29):

$$l \approx \frac{\lambda_0}{2} - l_B . \quad (4.6)$$

Optimal ist also eine halbe Resonanzwellenlänge λ_0 , welche um die Bunchlänge l_B verringert wird. Letztere nimmt dabei gemäß Abschnitt 2.2 einen Maximalwert von etwa 6 cm an.

Für λ_0 erhält man nun mit $\lambda = c/\nu$ nach Einsetzen von $\nu_0 = 1,49901$ GHz den Wert

$$\lambda_0 = 0,199994 \text{ m} \approx 20 \text{ cm} , \quad (4.7)$$

die Resonatorlänge sollte wegen (4.6) also bei etwa 4 cm liegen. Allerdings führen praktische Erwägungen zu einer etwas davon abweichenden Wahl: Wie in Abschnitt 3.8 dargelegt, ergibt sich für die aus einem Resonator ausgekoppelte Signalleistung (3.36) folgender Zusammenhang:

$$P_{\text{ext}} = R_s I^2 B^2 \frac{\kappa}{(1 + \kappa)^2} \cos^2 \phi . \quad (4.8)$$

Dies gilt unabhängig von der genutzten Mode, die Shuntimpedanz R_s beinhaltet gemäß Abschnitt 3.7.1 schon die Information über die Resonatorlänge sowie über die für jeden Monitortyp spezifische Feldverteilung an der Stelle des Strahls.

Damit kann (4.8) sowohl für den Lageresonator aufgestellt werden als auch für den Intensitätsmonitor, der wegen der Abhängigkeit der Signalleistung vom Strahlstrom für die Kalibration der Positionsmessung vorzusehen ist. Ein solcher Monitor wurde schon in Rahmen einer früheren Arbeit konstruiert und soll weiter zur Strahldiagnose betrieben werden.

Für die Positionsbestimmung ist es eine entscheidende Erleichterung, wenn der neu hinzukommende Lageresonator die gleiche Länge aufweist wie der Intensitätsmonitor. Denn in diesem Fall kann einfach der Quotient der beiden gemäß (4.8) aufgestellten und später durch Messung ermittelten Leistungen gebildet werden, wodurch sich dann die in der Shuntimpedanz enthaltene Abhängigkeit von der Resonatorlänge zusammen mit dem Quadrat des Strahlstromes herauskürzt. Es bleibt dann nur noch die bekannten Felder (3.2) und (3.3) sowie die Koppelfaktoren herauszurechnen, um ein absolutes Lagesignal zu erhalten.

Da in den Intensitätsmonitor sogenannte *Kapazitätsnasen*²⁸ zur Konzentration des Feldes nahe der Achse eingebaut wurden, ist damit die Strecke nicht verschwindenden Feldes auf den Abstand dieser Strukturen reduziert. Also sollte dieser Nasenabstand, welcher sich zu 51,6 mm ergibt, als Wert für die Länge des Lagemonitors festgelegt werden.

4.4 Platzierung der Einkopplung

Um dem Hohlraumresonator ein Signal entnehmen zu können, muss eine Einkopplung an geeigneter Stelle am Resonatorgehäuse angebracht werden. Dabei stellt sich grundsätzlich die Frage,

²⁸Es handelt sich dabei um eine kurze Verlängerung des Strahlrohres in den Resonatorinnenraum hinein.

ob mit einem Draht als Koppelantenne an das elektrische Feld angekoppelt werden soll, oder ob dieser, zur Koppelschleife umgebogen, für die Ankopplung an das magnetische Feld verwendet wird. Die Wahl fiel hier auf die Ankopplung per Antenne, da diese sich leicht herstellen lässt. Sie wird direkt in einem der beiden Maxima der longitudinalen Komponente E_z des elektrischen Feldes der TM_{110} -Mode platziert, siehe dazu Abbildung 3.2(a). Damit wird die Auskopplung eines starken Signals begünstigt.

Gemäß (3.3) ist die radiale Abhängigkeit des Feldes durch die Besselfunktion erster Ordnung gegeben:

$$E_z \propto J_1\left(\frac{3,83171}{a} r\right) . \quad (4.9)$$

Deren Verlauf weist wegen $n = 1$ nur ein Maximum bis zur Resonatorwand auf. Dieses lässt sich als Funktion des Resonatorradius ermitteln. Die übliche Extremalbedingung verlangt den Höchstwert bei der Nullstelle der ersten Ableitung von J_1 nach dem Radius. Nun verschwindet die Besselfunktion J_1' von Null ausgehend erstmalig, wenn ihr Argument den Wert $j'_{11} = 1,84118$ annimmt (z.B. [AS72], S. 411).

Dieses Ergebnis wird jetzt in Beziehung gesetzt mit der in (4.9) angegebenen Nullstelle j_{11} von J_1 , welche ja den Radius des Resonators kennzeichnet. Der optimale Wert für die Entfernung r_k der Koppelantennen von der Strahlachse ergibt sich dann, in Abhängigkeit vom Hohlraumradius a , gemäß

$$r_k = \frac{j'_{11}}{j_{11}} a = \frac{1,84118}{3,83171} a = 0,4805 a . \quad (4.10)$$

Für die Lagemessung soll die unverschobene TM_{110} -Mode genutzt werden. Deshalb wird man sich auf einer Achse, die senkrecht zur Verbindungslinie der Modentrenner steht und durch das Zentrum des Resonators geht, einen der beiden Punkte im Abstand $0,4805 a$ von der Resonatorachse herausnehmen, um dort die Koppelantenne anzubringen.

Um die Ergiebigkeit des Signals weiter zu verbessern und sich eine Möglichkeit zur Abstimmung der Eigenfrequenz des Resonators zu verschaffen, kann man auf der Resonatorendfläche gegenüber der Koppelantenne noch einen Metallzylinder einbauen.

Dieser hat zwei Funktionen ([Sch04], S. 4):

- Der effektive Abstand d der als Kondensatorplatten zu interpretierenden Endflächen des Hohlraums mit einer Fläche A wird verringert, gemäß $C = \epsilon\epsilon_0 A/d$ steigt dann die Kapazität des Schwingkreises. Wegen (3.11) fällt damit die Resonanzfrequenz ω_0 , man kann sie folglich über die Höhe des Kapazitätszylinders beeinflussen: Je länger der Zylinder, desto kleiner die Frequenz.
- Analog zu einem Kondensator mit verringertem Plattenabstand wird das Feld zwischen den Zylinderendflächen im Vergleich zur nahen Umgebung erhöht. Diese Verdichtung der Feldlinien am Ort der Auskopplung begünstigt die Signalstärke.

Aus Symmetriegründen ist der Einbau zweier solcher *Kapazitätszylinder* notwendig, auf jeder Seite der Strahlachse je einer. Ansonsten würden die Felder und damit das Lagesignal nicht in beiden Halbebenen des Resonators bei gleichem r die gleiche Stärke aufweisen.

4.5 Anpassung der Resonanzfrequenz durch einen Abstimmstempel

Zwar kann man, wie im vorigen Abschnitt erläutert, den Resonator über die Länge der Kapazitätszylinder verstimmen, allerdings geht dies nur durch Ausbau und anschließendes Abdrehen derselben in der Werkstatt. Um also den Resonator auch noch im eingebauten und evakuierten Zustand verstimmen zu können, ist eine zusätzliche Vorrichtung nötig.

Es bietet sich hierbei an, einen zylindrischen Abstimmstempel durch ein Loch im Resonatormantel in den Hohlraum einzuführen ([Sch04], S. 4). Dessen Eindringtiefe wird dann über eine Stellschraube variiert, was die Feinabstimmung der Resonanzfrequenz auch nach Montage des Monitors am Einsatzort ermöglicht. Der Stempel bewirkt dabei eine effektive Verringerung des Hohlraumradius, wegen (3.8) wird die Resonanzfrequenz um so höher, je mehr Raum der Kolben einnimmt.

Allerdings muss darauf geachtet werden, dass das Hochfrequenzverhalten des Monitors nicht durch den unvermeidlichen Freiraum zwischen Resonatormantel und Stempel verändert wird. Die Felder können sich dabei in die schmale Ritze hinein ausbreiten und werden dann an der Vakuumdichtung des Stempels reflektiert.

Um eine Störung zu vermeiden bedient man sich der folgenden Struktur: Der Stempel wird in seinem oberen Teil abrupt auf einen viel kleineren Radius verjüngt, wodurch ein kleines, zylindersymmetrisches Stück Koaxialleitung entsteht. In dieses können nun durch die Ritze zwischen Wand und Stempel die Wellen aus dem Hohlraumresonator eindringen. Am Ende des verjüngten Stempelteils werden die eingekoppelten Wellen dann reflektiert und erfahren einen Phasensprung von 180° , denn es liegt wegen der bewusst als leitend ausgeführten Verbindung zwischen Stempel und Resonatormantel, also Innen- und Außenleiter der Koaxialleitung, Reflexion am *geschlossenen Ende* vor. Die reflektierten Wellen treffen nun auf dem Rückweg zum Resonatorinnenraum auf den breiten Teil des Stempels, welcher wiederum einen Großteil reflektiert. Allerdings ist an dieser Stelle der Außenleiter nicht mit dem Innenleiter verbunden, an einem solchen *offenen Ende* tritt deshalb auch *kein* Phasensprung auf. In Abbildung B.1 findet sich zur Veranschaulichung die Konstruktionszeichnung für die Abstimmvorrichtung. Die erwähnten Stellen, an denen Reflexion auftritt, sind kenntlich gemacht.

Diese Konstruktion von offenem und geschlossenem Ende lässt sich wie folgt ausnutzen: Wenn die Länge des verjüngten Stempelteils geeignet gewählt wird, tritt destruktive Interferenz zwischen den hin und her reflektierten Wellen auf. Damit würde die Stempelöffnung kaum störend auf die Eigenschaften des Resonators wirken, da keine nennenswerten Feldstärken in ihrem Bereich auftreten.

Mit einer Strecke von einem Viertel der zur Resonatoreigenfrequenz gehörenden Wellenlänge erreicht man, dass sich die Felder gegenseitig aufheben. Die Wellen erleiden immer nur an einer der beiden Wände einen Phasensprung, weswegen sie sich beim einmaligen Hin- und Herlaufen – vom geschlossenen Ende zum offenen Ende und zurück – in der Phase um 180° voranbewegen. Genau dann tritt der Phasensprung um ebenfalls 180° auf. Im Zeitmittel begegnen sich also immer gleich viele Wellenbögen mit 0° und mit 180° relativer Phasenverschiebung, die Felder heben sich auf.

Wie in Abschnitt 4.2 dargelegt, soll der Resonator bei der dreifachen Beschleunigerhochfrequenz betrieben werden, also bei $3 \cdot \nu_{\text{HF}} = 1499,01 \text{ MHz}$, vgl. Tabelle 4.1. Das ergibt dann mit $c = \lambda \nu$ eine Wellenlänge von fast exakt 20 cm. Die Länge des verjüngten Stempelstücks ist also auf $\lambda/4 = 5 \text{ cm}$ festzulegen, vgl. Abbildung B.1.

4.6 Entkoppelung der beiden Resonatoren

Da das Feld der TM_{110} -Mode in der Strahlquerschnittsebene nur eine Symmetrieachse aufweist, sind für die Messung horizontaler und vertikaler Ablagen zwei identische Resonatoren erforderlich, die um 90° gegen einander verdreht sind. Es bietet sich an, für beide eine gemeinsame Endfläche mit einer Strahlöffnung zu schaffen, so dass für den Gesamtresonator nur noch zwei Deckel erforderlich sind. Aus praktischen Gründen wird in diese Deckel die Einkopplung eingebaut werden, so dass die Kapazitätszylinder an den Resonatormittelteil geschraubt werden können, ebenso die Modentrenner.

Um eine störungsfreie Messung gewährleisten zu können, sollten sich die Feldverteilungen von x - und y -Resonator nicht gegenseitig beeinflussen. Deshalb ist zu vermeiden, dass sich die Felder über die runde Öffnung in der gemeinsamen Wand in den jeweils anderen Hohlraum ausbreiten.

Diese Verbindung wirkt wie ein kurzes Stück Hohlleiter, welcher gemäss Abschnitt A.1.3 die Ausbreitung von Wellen eines bestimmten Typs nur dann nahezu verlustfrei zulässt, wenn deren Frequenz oberhalb der durch die Geometrie des Leiters festgelegten Grenzfrequenz liegt. Jede Mode besitzt eine eigene Grenzfrequenz, welche im kreiszylindrischen Fall wegen (A.22) bei Verkleinerung des Radius steigt.

Um nun einzuschätzen, wie gut sich die Felder der Hohlraummode in diese hohlleiterartige Durchbohrung hinein ausbreiten können, hilft ein Radienvergleich. Der Hohlraumresonator lässt sich, wie in Abschnitt A.1.5 ausgeführt wird, als Spezialfall eines runden Hohlleiters auffassen, hat also bei der zur Lagemessung genutzten TM_{110} -Mode wegen seines deutlich größeren Radius eine viel geringere Frequenz, als sie die korrespondierende TM_{11} -Hohlleitermode aufweist. Das bedeutet für die Felder der TM_{110} -Mode, die in den Bereich der Durchbohrung eintreten und sich dort als TM_{11} -Hohlleitermode auszubreiten versuchen, dass sie in deren Cutoff-Bereich liegen.

Die Konsequenz kann man sich an Hand der Dispersionsrelation (A.13), aufgeschrieben für die Modenindizes m und n , veranschaulichen (hier speziell für das Vakuum als Medium):

$$k_{mn} = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_{mn}^2} . \quad (4.11)$$

Die Wellenzahl k_{11} der TM_{11} -Mode wird als Wurzel aus einer negativen Zahl (die Frequenz ω ist kleiner als die Cutoff-Frequenz ω_{11}) komplex, wodurch der longitudinale Faktor des elektrischen Feldes in Gleichung (A.4) zu einer exponentiell abklingenden, reellen Funktion $D(z)$ wird:

$$\vec{E} = \vec{E}(r, \varphi) e^{\pm ikz} = \vec{E}(r, \varphi) \underbrace{e^{-|k|z}}_{=:D(z)} . \quad (4.12)$$

Die Durchbohrung wirkt also für die entscheidenden Felder dämpfend.

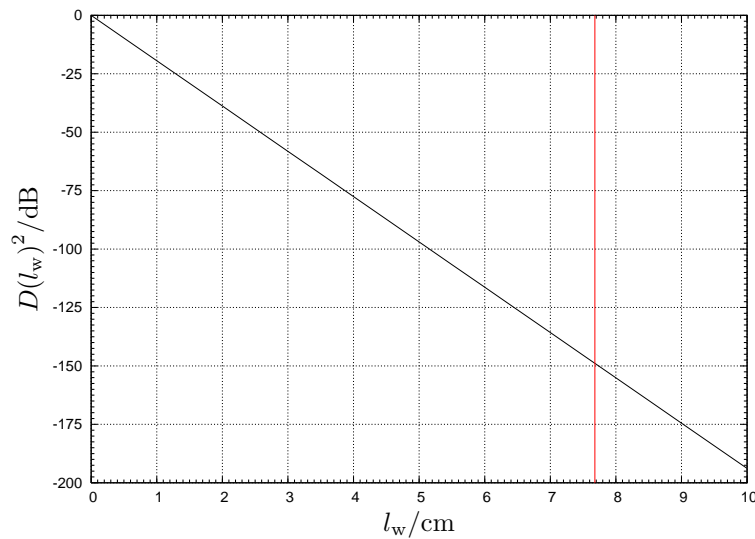


Abbildung 4.2: Der von der Rohrlänge l_w abhängige Dämpfungsfaktor D^2 für die Energie einer TM_{11} -Hohlrohrwelle, angegeben in Dezibel. Die senkrechte Linie kennzeichnet die Dämpfung für die endgültige Wahl.

Gleichung (A.22) kann man nun einen Ausdruck für die Cut-Off-Frequenz ω_{11} der TM_{11} -Mode im Vakuum entnehmen:

$$\omega_{11} = c \frac{j_{mn}}{a} = c \frac{3,83171}{a} = 67,57 \text{ GHz} . \quad (4.13)$$

Für das letzte Gleichheitszeichen wurde der Strahrorradius $r_{\text{sr}}=17 \text{ mm}$ eingesetzt. Die Wellenzahl ergibt sich dann aus (4.11), wenn man für ω die mit einem Faktor 2π multiplizierte Schwingungsfrequenz der Hohlraumfelder von $1,499010 \text{ GHz}$ einsetzt:

$$k = 223,19 \text{ m}^{-1} . \quad (4.14)$$

Die für die Leistung zu erwartende Dämpfung lässt sich mit dem Quadrat der Exponentialfunktion $D(z)$ aus (4.12) berechnen, da die Leistung quadratisch von der Feldstärke \vec{E} abhängt. In Abbildung 4.2 ist die Dämpfung der Hohlrohrwelle als Funktion der durchlaufenen Dicke der Resonatorzwischenwand l_w aufgetragen.

Schon ab einer Wandstärke von 3 cm liegt die Dämpfung bei knapp 60 dB . Die endgültige Wahl von $7,68 \text{ cm}$ führt zu einer Unterdrückung der Felder des jeweils anderen Resonators um etwa -150 dB , was eine gegenseitige Beeinflussung der beiden Lagesignale im Rahmen der Messgenauigkeit ausschließen sollte.

5 Numerische Simulation der Feldverteilung

Ziel ist es, vor der eigentlichen Monitorkonstruktion mittels einer Computersimulation die Resonatorgeometrie auf den angestrebten Verwendungszweck hin zu optimieren. Das Softwarepaket MAFIA ist in der Lage, mittels Lösung der maxwellschen Gleichungen auf einem vorgegebenen Raumgitter die Eigenmoden eines Hohlraumresonators zu berechnen (siehe Abschnitt 3.9). Insbesondere muss die Frequenz der zur Verwendung kommenden TM_{110} -Mode in etwa bei der gewünschten Frequenz von 1,499010 GHz liegen.

5.1 Wahl der Simulationsparameter

Aus den in Abschnitt 4 dargelegten Betrachtungen heraus ergeben sich folgende Forderungen an den Monitor:

Radius a : Wie Tabelle 4.1 zu entnehmen ist, sollte der Radius für eine Resonanzfrequenz von 1499,010 MHz in der Nähe von $a = 122$ mm liegen.

Länge l : Die Länge ist im Prinzip frei wählbar, gemäß den Erläuterungen in Abschnitt 4.3 bietet es sich aber an, die effektive Länge²⁹ des wegen (3.36) für die Normierung benötigten Strahlstrommonitors von 5,16 cm zu wählen.

Radiale Position von Antenne und Kapazitätszylindern r_k : Der Radius für das Maximum der elektrischen Feldstärke ist durch (4.10) gegeben: $r_k = 0,4805 a$. Mit $a = 122$ mm erhält man $r_k = 58,6$ mm, wobei auf die in der Werkstückbearbeitung üblicherweise erreichbare Präzision von 1/10 mm gerundet wurde.

Weiterhin sind noch folgende Größen festzulegen:

- Radius und Länge der Kapazitätszylinder,
- Radius, Länge und Position der Modentrenner,
- Radius des Abstimmstempels,
- Länge des Strahlrohrs.

Dazu bot es sich an, die seitens MAMI vom Institut für Kernphysik der Universität Mainz zur Verfügung gestellte Referenzgeometrie eines Lagemonitors hoher Güte heranzuziehen, um die dort gewonnenen Erfahrungswerte für die Abmessungen der Resonator details zu nutzen.

Dabei kann man sich die folgende Tatsache zu Nutze machen: Die Eigenschaften eines Hohlraumresonators skalieren mit seinen Abmessungen, siehe dazu Abschnitt A.2 im Anhang. Insbesondere findet sich, dass ein Hohlraumresonator, dessen Maße um einen Faktor α verändert wurden, eine um den Faktor $1/\alpha$ modifizierte Resonanzfrequenz aufweist.

Um die erprobte Mainzer Geometrie an die für den Resonator verwendete dreifache ELSA-Hochfrequenz $3 \cdot \nu_{HF}$ anzupassen, wurden zunächst sämtliche Abmessungen mit folgendem Faktor skaliert:

$$\alpha = \frac{\nu_{MAMI}}{3 \cdot \nu_{HF}} = \frac{2449,532 \text{ MHz}}{3 \cdot 499,67 \text{ MHz}} = 1,6341 \quad . \quad (5.1)$$

Die Ergebnisse finden sich in Tabelle 5.1. Man erkennt, dass der Resonatorradius von $a = 120,9$ mm recht nahe an den auf Grund der vereinfachten Abschätzung erwarteten 122 mm liegt. Weiterhin trifft das Verhältnis von Kapazitätszylinder-Position p_{kz} zu Resonatorradius a mit 0,48 recht genau den geforderten Wert.

²⁹Der Abstand der Kapazitätsnasen, zwischen denen der größte Teil der Feldenergie gespeichert ist.

Struktur	Maß	Mainz (m)	ELSA I (m)	ELSA II (m)
Strahlrohr	l_{sr}	0,2000	0,3268	
	r_{sr}	0,0100	0,0163	
Hohlraum	l	0,0556	0,0908	0,0516
	a	0,0740	0,1209	
Modentrenner	l_{mt}	0,0450	0,0735	0,0418
	r_{mt}	0,0030	0,0049	
Kapazitätszylinder	p_{mt}	0,0670	0,1095	
	l_{kz}	0,0040	0,0065	0,0037
	r_{kz}	0,0050	0,0082	
Loch	p_{kz}	0,0355	0,0580	
	r_{al}	0,0100	0,0163	0,0093
Abstimmkolben	r_{as}	0,0085	0,0139	0,0079
	l_{as}	0,0306	0,0500	

Tabelle 5.1: Die in die Simulation mit MAFIA eingehenden Parameter der Resonatorgeometrie, die Symbole l und r stehen jeweils für Länge und Radius einer Struktur. Bei den in bestimmtem Abstand zur Resonatorachse eingebrachten Zylindern steht p für die Position in radialer Richtung. Es finden sich neben den Referenzwerten aus Mainz die entsprechend skalierten Werte für den Bonner Resonator (ELSA I), welche in Teilen noch angepasst wurden (ELSA II).

Verändert wurde nach der Skalierung dann allerdings wie oben beschrieben die Resonatorlänge l . Um dieser Tatsache Rechnung zu tragen, wurden alle longitudinalen Abmessungen um den gleichen Faktor verringert. Außerdem wurde der Strahlrohrradius r_{sr} auf einen glatten Wert von 34 mm gerundet.

5.2 Eigenmoden in der Nähe der Nutzfrequenz

Mit den an ELSA angepassten Daten lassen sich die Feldverteilungen der Resonatormoden mit MAFIA berechnen. Die Simulationssoftware liefert dabei insbesondere auch die Eigenfrequenzen der Moden in aufsteigender Reihenfolge. Um nun die Modenzuordnung zu erleichtern, kann man unter Annahme des einfachen Resonatormodells aus Abschnitt 3.3 die Reihenfolge der niedrigsten zu erwartenden Eigenschwingungen aus Abbildung 3.3 ablesen.

Das Verhältnis von Durchmesser d zu l ergibt sich mit den Werten aus den letzten beiden Spalten von Tabelle 5.1 zu 4,691, quadriert beläuft es sich dann auf ≈ 22 . In der Modenkarte erkennt man, dass bei einem solchen Wert für die niedrigsten Frequenzen offensichtlich nur die Eigenschwingungen mit $p = 0$, welche prinzipiell nicht von der Resonatorlänge abhängen und damit als waagerechte Linien im Plot auftauchen, in Frage kommen. Die ersten Moden mit $p \neq 0$ sollten wegen ihrer Geradensteigung an der zu betrachtenden Stelle im Diagramm einen deutlichen Abstand selbst von der höchsten eingezeichneten TM_{mn0} -Mode haben.

Es bleibt also festzuhalten, dass als Nachbarn der Nutzmode TM_{110} die im Frequenzspektrum unter ihr liegende TM_{010} sowie die über ihr liegende TM_{210} -Mode in Frage kommen. Die Frequenzen der drei Eigenschwingungen ergeben sich mit (3.8) nach Teilen durch 2π zu 0,950 GHz, 1,510 GHz und 2,029 GHz.

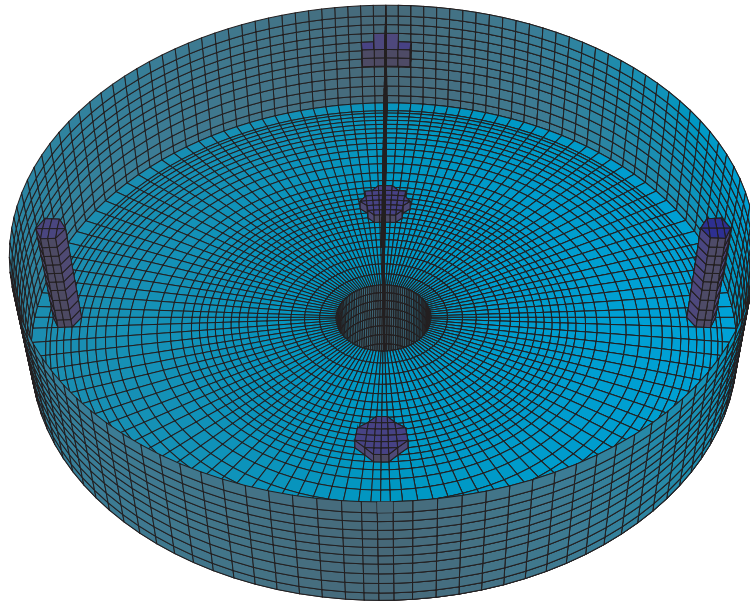


Abbildung 5.1: Der durch ein Gitter angenäherte Resonator, Schnitt in der (r, φ) -Ebene nahe einer der beiden Endflächen. Man erkennt oben den Abstimmstempel, links und rechts die Modentrenner sowie auf der dazu senkrechten Achse die flacheren Kapazitätszylinder. Das Netz besteht aus 300.000 Gitterpunkten und wurde an Stellen mit feineren Strukturen verdichtet (*MAFIA*, *CST*).

5.3 Simulation des Resonators mit MAFIA

Mittels der grafischen Oberfläche von MAFIA konnte der Resonator mitsamt seinen inneren Strukturen zunächst als geometrisches Konstrukt eingegeben werden. Dabei ist bei einem neuen Projekt der ganze zur Konstruktion zur Verfügung stehende Raum mit einer bestimmten Materialkennung versehen. Weist man dieser die leitenden Eigenschaften eines Metalls zu, so kann der Hohlraum und ein ausreichend langes Strahlrohr³⁰ dann gewissermaßen herausgeschnitten werden, indem den entsprechenden Zylindern eine neue Materialkennung zugewiesen wird, die dann für die Eigenschaften des Vakuums steht. Zusätzliche Strukturen wie Kapazitätszylinder, Abstimmstempel und Modentrenner werden dann unter der Definition metallischer Eigenschaften ergänzt. In Abbildung 5.1 ist der fertige Resonator zu sehen.

Um seine Geometriedetails mit dem auf Zylinderkoordinaten basierendem Gitternetz möglichst genau erfassen zu können, wurde die Netzdichte an entscheidenden Stellen erhöht. Beispielsweise war dies bei den Radiuswerten der Zylinder und Modentrenner erforderlich, für die auch in azimuthaler Richtung das Netz bei den entsprechenden Werten für den Winkel φ verdichtet wurde. Vergrößert wurde die Auflösung dann wiederum in z -Richtung zu den Enden des Strahlrohrs hin.

Schließlich konnte nach Wahl der Randbedingungen an den Endwerten der drei Koordinatenrichtungen der sogenannte *eigenmode solver* gestartet werden. Es handelt sich dabei um das

³⁰Da sich das Strahlrohr als Hohlleiter im Cut-Off-Bereich (siehe Abschnitt A.1.3) der Wellen der Nutzmode befindet, werden diese stark gedämpft und erreichen nur auf einer kurzen Strecke in das Rohr hinein nennenswerte Feldstärken. In der Simulation darf deshalb das eigentlich in seiner Länge deutlich über den Resonatorabmessungen liegende Strahlrohr schon nach vergleichsweise kurzer Strecke am leitenden Material enden.

für die Errechnung der Eigenmoden einer Kavität zuständige Modul des Softwarepakets. Für eine gemäß Handbuch empfohlene Zahl von fünf Iterationen wurde dann die Rechnung gestartet, wobei die ersten sieben Eigenmoden ausgegeben und gespeichert werden sollten.

Nach ersten Berechnungen mit den Daten aus der Spalte ELSA II von Tabelle 5.1 erwies sich die Frequenz der Nutzmode, also der unverschobenen und damit tiefer liegenden TM_{110} -Eigenschwingung, als zu gering. Deswegen wurde der Radius solange angepasst, bis die Resonanzfrequenz in der Nähe der gewünschten 1,49901 GHz lag. Außerdem wurde der Stempelradius r_{as} aus konstruktionstechnischen Gründen auf 0,080 m aufgerundet und die wegen der Aufrundung des Rohrradius auf 0,017 m erfolgte Frequenzverschiebung durch eine Verkürzung der Kapazitätszylinder um 3/10 mm auf 0,0034 m kompensiert. Die Ergebnisse dieser Rechnung finden sich in Tabelle 5.2.

Nr.	Mode	$\nu_{\text{th}} / \text{GHz}$	ν / GHz
1	TM_{010}	0,950	0,946871
2			1,350824
3			1,428691
4	TM_{110}	1,510	1,498556
5	TM_{110}		1,622448
6	TM_{210}	2,029	2,026918
7	TM_{210}		2,072634

Tabelle 5.2: Die theoretisch anhand der einfachen Näherung erwarteten Frequenzen ν_{th} , zusammen mit den Ergebnissen der Rechnung mit MAFIA für die endgültigen, angepassten Maße

Dabei liegt die Frequenz der gesuchten vierten Mode um 454 kHz neben der ELSA-Hochfrequenz. Man erkennt, dass die Resonanzfrequenzen des mit zusätzlichen Strukturen angereicherten Resonators sich nicht wesentlich von denen aus der Näherung unterscheiden. Wie erwartet (vgl. Abschnitt 4.1) haben die Modentrenner dazu geführt, dass sich die TM_{010} in zwei Moden aufspaltet. Anhand eines Plots der Feldverteilung in MAFIA sind klar die 4. und 5. Mode als TM_{110} -Mode zu erkennen. Die *Quadrupolmode* TM_{210} ³¹ spaltet ebenfalls in zwei Moden auf.

Außerdem haben sich zwei weitere Moden bei 1,35 GHz und 1,43 GHz ergeben. Ein Blick in die Feldverteilung erlaubt keine eindeutige Zuordnung, es ergibt sich aber eine starke Feldkonzentration bei den Modentrennern, deren Vorhandensein das Auftreten dieser Moden in der Simulation zu begünstigen scheint. Die Abmessungen, die in der Rechnung mit MAFIA zu den obigen Ergebnissen geführt haben, finden sich in Tabelle 5.3.

5.4 Berechnung der Möglichkeiten zur Frequenzkorrektur

Um später am realen Resonator Korrekturen an der Resonanzfrequenz durchführen zu können, sind folgende Mechanismen vorgesehen:

- Über die Länge der Kapazitätszylinder kann die die Resonanzfrequenz beeinflusst werden: Je kürzer der Zylinder, desto höher die Frequenz (vgl. Abschnitt 4.4).
- Die Eintauchtiefe des Abstimmstempels verändert ebenfalls die Resonanz: Fährt man ihn in den Hohlraum hinein, so steigt die Frequenz (vgl. Abschnitt 4.5).

³¹Mit $m = 2$ wechselt die longitudinale Feldstärke E_z wegen des Faktors $\cos(m\varphi)$ bei einem vollen azimuthalen Umlauf viermal das Vorzeichen – die Resonatorquerschnittsebene zerfällt in vier Segmente.

Teil	Maß	Wert /m
Strahlrohr	l_{sr}	0,3268
	r_{sr}	0,0170
Hohlraum	l	0,0516
	a	0,1210
Modentrenner	l_{mt}	0,0418
	r_{mt}	0,0049
	p_{mt}	0,1096
Kapazitätszylinder	l_{kz}	0,0034
	r_{kz}	0,0082
	p_{kz}	0,0581
Loch	r_{al}	0,0093
Abstimmstempel	r_{as}	0,0080
	l_{as}	0,0501

Tabelle 5.3: Die endgültigen Maße nach erfolgter Anpassung der Resonanzfrequenz

Um den Effekt dieser beiden Maßnahmen einschätzen zu können, wurden für sechs Zylinderlängen und fünf Kolbenstellungen die jeweilige Resonanzfrequenz ausgerechnet. Die Ergebnisse finden sich in Tabelle 5.4, es handelt sich bei dem Satz der verwendeten allgemeinen Geometrieparameter um eine vorläufige Fassung.

(a) Zylinderlänge			(b) Stempel-Eintauchtiefe		
l_{kz}/mm	ν/GHz	$\Delta\nu/\text{MHz}$	l_{as}/mm	ν/GHz	$\Delta\nu/\text{MHz}$
2,2	1,501717	3,242	0	1,498475	0,000
2,7	1,500845	2,370	5	1,499501	1,026
3,2	1,499619	1,144	10	1,500913	2,438
3,7	1,498475	0,000	15	1,502242	3,767
4,2	1,497205	-1,270	20	1,503073	4,598
4,7	1,495808	-2,667			

Tabelle 5.4: Die Verschiebung $\Delta\nu$ der Resonanzfrequenz bei Variation der Kapazitätszylinderlänge l_{kz} bzw. der Eintauchtiefe l_{as} des Abstimmstempels

Man erkennt in Tabelle 5.4(a), dass ein Millimeter Unterschied in der Zylinderlänge zu einer Frequenzveränderung von etwa 2,5 MHz führt, um die sich etwaige Abweichungen von der Resonanzfrequenz kompensieren lassen. Der mit dem Abdrehen der Zylinder verbundene Aufwand der Resonatorbelüftung lässt diese Methode aber nur zur ersten Grobjustierung praktikabel erscheinen.

Mit dem Abstimmstempel, dessen Position sich über ein entsprechend feines Schraubgewinde einstellen lassen wird, kann man dann auch am zusammengebauten und schon evakuierten Resonator eine Feinjustierung vornehmen: Bei 0,5 cm Eintauchtiefe ist gemäß Tabelle 5.4(a) ein Unterschied von etwa 1 MHz zu verzeichnen.

5.5 Einschätzung der Zuverlässigkeit der Ergebnisse

Um die von der Simulation gelieferten Ergebnisse auf ihre Zuverlässigkeit hin abschätzen zu können, bot es sich an, die Mainzer Daten aus Tabelle 5.1 in die Simulation einzugeben und die errechneten Eigenmoden mit der tatsächlichen Hochfrequenz des Mainzer Beschleunigersystems zu vergleichen.

Nach Eingabe aller Parameter und Verfeinerung des Gitternetzes an Stellen mit feineren Geometriedetails, insbesondere also an den Stellen, wo Modentrenner und Zylinder angebracht sind, ergab die Simulation die in Tabelle 5.5 angegebenen Frequenzen.

Nr.	ν /GHz
1	1,471981
2	1,420914
3	1,631615
4	2,450620
5	2,543218
6	2,945786

Tabelle 5.5: Die Ergebnisse der Rechnung mit MAFIA für die Mainzer Geometrie.

Dabei entspricht die vierte Mode mit 2,450620 GHz recht gut der in Mainz verwendeten Hochfrequenz von 2,449532 GHz. Mittels der graphischen Anzeige der Feldverteilung in MAFIA konnte sie als diejenige der beiden durch die Modentrenner aufgespaltenen TM_{110} -Moden identifiziert werden, welche die kleinere Resonanzfrequenz aufweist. Die Abweichung der Frequenzen von etwa 1 MHz gibt nun eine ungefähre Größenordnung vor, inwieweit die Resonanzfrequenz des fertigen Resonators von der simulierten entfernt sein dürfte.

Eine weitere Möglichkeit, die Genauigkeit der MAFIA-Rechnungen einzuschätzen, bietet sich durch Variation des verwendeten Gitternetzes. Durch die Vorgabe von Linien bei bestimmten Koordinaten sowie die Angabe von Gewichtungsfaktoren für die Hauptnetzlinien kann die Simulation immer wieder mit einem anderen Raster gestartet werden, ohne die Geometriedetails zu verändern. Mittels vier verschiedener Netze konnte so eine Abschätzung des Fehlers gefunden werden. Für den Mittelwert inklusive Standardabweichung der errechneten Resonanzfrequenzen ergibt sich der folgende Wert:

$$\bar{\nu}_{110} = (1,49852 \pm 0,00022) \text{ GHz} \quad . \quad (5.2)$$

Die mit MAFIA für die Resonanzfrequenz des Hohlraumresonators gewonnenen Simulationsergebnisse sind also gemäß dieser Abschätzung mit einem Fehler von etwa 200 kHz behaftet.

Für den an ELSA verwendeten Lagemonitor sollte eine Abweichung dieser Größenordnung kein Problem darstellen: Wie in Abschnitt 5.4 dargelegt, kann pro abgedrehtem Millimeter an den Kapazitätszylindern eine Frequenzdifferenz von etwa 2,5 MHz erreicht werden. Das sollte ausreichen, um etwaige durch mangelnde Präzision der Simulation oder durch die spätere Fertigung entstandene Abweichungen auszugleichen.

5.6 Berechnung von wichtigen Kenngrößen des Lagemonitors

Die mit der MAFIA-Simulation gewonnenen Feldgrößen auf dem Gitternetz können mit dem sogenannten *post processor*-Modul weiter verarbeitet werden. Insbesondere erlaubt die Software es, mit eingebauten Funktionen zur Berechnung von Linienintegralen, Leitungsverlusten und gespeicherter Feldenergie, wichtige Kenngrößen des simulierten Resonators zu berechnen.

5.6.1 Die Güte des Resonators

Die Güte des Resonators kann gemäß (3.20) bestimmt werden, hier noch einmal der Zusammenhang:

$$Q_0 = \omega_0 \frac{W}{P_v} . \quad (5.3)$$

Die im Resonator gespeicherte Energie W sowie die Verlustleistung P_v lassen sich für den Spezialfall der für die Simulation willkürlich gewählten Anregung des Hohlraums mit der Software berechnen. Die aus den gewonnenen Werten ermittelte Güte ist dann wieder von dieser Normierung unabhängig.

Zunächst soll mit W die in den Feldern des Resonators gespeicherte Energie berechnet werden. Dazu kann die entsprechende Mode ausgewählt werden, woraufhin MAFIA für die TM_{110} -Mode den folgenden Wert liefert:

$$W = 2,906 \cdot 10^{-12} \text{ J} . \quad (5.4)$$

Vor der Berechnung der Verlustleistung P_v muss dann für die beiden dem Resonatormaterial zugeordneten Materialkennungen (vgl. Abschnitt 5.3) die elektrische Leitfähigkeit angegeben werden. Wegen der einfachen Verarbeitungsmöglichkeit soll der Lagemonitor aus Aluminium gebaut werden, welches als reines Material eine Leitfähigkeit von $37,7 \text{ M}\Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$ aufweist.

Gibt man dies in die Simulation ein, so kann MAFIA eine Berechnung der umgesetzten Verlustleistung vornehmen. Dabei bedient sich das Programm einer Methode zur Störungsrechnung, welche von den aus der verlustfreien Simulationsrechnung gewonnenen Feldern ausgeht (vgl. [CST01], S. F24/25). Als Ergebnis erhält man für die entsprechende Mode:

$$P_v = 1,572 \cdot 10^{-06} \text{ W} . \quad (5.5)$$

Damit ergibt sich nach Einsetzen der gewonnenen Werte in (5.3) mit einer Resonanzfrequenz von $\nu_0 = 1,498556 \text{ GHz}$ der folgende Wert für die unbelastete Güte Q_0 des Resonators:

$$Q_0 = 17406 . \quad (5.6)$$

Dieser Wert kann einen ungefähren Anhaltspunkt für die tatsächlich zu erwartende Güte geben, allerdings wird diese von der Leitfähigkeit der für den Resonatorbau verwendeten Legierung abhängen. In der Praxis führt zudem die unvermeidliche Rauigkeit der Materialoberflächen zu etwas geringeren Güten, da die Wandstromverluste auf Grund der Unebenheiten größer ausfallen.

5.6.2 Die Shuntimpedanz für verschiedene Ablagen

Wie in Abschnitt 3.8 dargestellt, ist die Shuntimpedanz des Resonators, also sein von der Strahlablage abhängiger Widerstand R_s , neben einigen anderen Größen maßgebend für die Signalstärke des Lagemonitors. Stellt man (3.26) nach ihr um, so erhält man den folgenden Zusammenhang:

$$R_s = \frac{\hat{U}^2}{2 P_v} . \quad (5.7)$$

Die Verlustleistung des Resonators wurde im vorigen Abschnitt ermittelt, es fehlt noch die Spannung \hat{U} . Gemäß der Schilderung in Abschnitt 3.7 handelt es sich dabei um die maximal mögliche Potentialdifferenz, die ein Elektron beim Durchlaufen des Resonators erfahren kann. Sie ergibt sich aus dem Linienintegral (3.27) über die elektrische Feldkomponente in longitudinaler

r / m	\hat{U} / V	R_s / Ω
0,0089	0,197	12366
0,0164	0,364	42075

Tabelle 5.6: Die Shuntimpedanz R_s des Resonators in Abhängigkeit von der bei einer Strahlablage r durchlaufenen Potentialdifferenz \hat{U}

Richtung, wobei die Integration nicht auf die exakte Resonatorlänge beschränkt ist, sondern auch Bereiche im Strahlrohr erfasst, da die Felder ein wenig darin eindringen können.

Die Software MAFIA erlaubt es, Linienintegrale von Feldgrößen entlang von Gitternetzlinien auszurechnen. Dabei wird über die Angabe von $\beta = v/c$ auch die Geschwindigkeit v der Teilchen berücksichtigt, da sich die Felder während ihres Aufenthalts im Resonator ändern. Da sich die Elektronen im Beschleuniger fast exakt mit Lichtgeschwindigkeit fortbewegen, kann $\beta = 1$ gesetzt werden.

Wählt man nun aus den bestehenden Gitterlinien diejenigen aus, die einen Winkel φ in Richtung des Feldmaximums aufweisen und deren Ablage den Strahlrohrradius von $r_{\text{sr}} = 17 \text{ mm}$ nicht überschreitet, so erhält man mit $P_v = 1,5720 \cdot 10^{-6} \text{ W}$ aus (5.5) die in Tabelle 5.6 aufgeführten Shuntimpedanzen. Die Spannungen U beziehen sich dabei auf den für die Simulation willkürlich gewählten Energieinhalt des Resonators und stellen keine für den Betrieb typischen Werte dar. Anhand der gewonnenen Werte lässt sich direkt die Abhängigkeit (3.39) überprüfen, also $R_s \propto x^2$. Demzufolge müsste das Verhältnis der Quadrate der Ablagen dem Quotienten aus beiden Shuntimpedanzen entsprechen. Es ergibt sich der Wert 0,295 bzw. 0,294, im Einklang mit der Theorie.

Mit den Werten für die Shuntimpedanz kann mit (3.36), nach erfolgter Wahl der Koppelstärke κ , für die typischen externen Strahlströme an ELSA die zu erwartende Leistung des Lagesignals ausgerechnet werden.

6 Anpassung an die Betriebsbedingungen

6.1 Einstellen der Kopplung

Für das Verhalten des Resonators und für die Stärke des Messsignals ist die Kopplung von entscheidender Bedeutung. Sie wird über die Länge der Koppelantennen eingestellt, wobei ein Kompromiss zwischen hohen Signalleistungen und Empfindlichkeit gegen Verschiebungen der Resonanzfrequenz gefunden werden muss. Letztere können sich insbesondere auf Grund von Temperaturschwankungen ergeben.

6.1.1 Temperaturabhängigkeit der Resonanzfrequenz

Das Resonatormaterial wird sich bei einer Temperaturerhöhung um ΔT ausdehnen. Über die entsprechende Geometrieänderung stellt sich damit dann auch eine Erniedrigung $\Delta\nu$ der Resonanzfrequenz ν_0 ein ($\nu \propto 1/a$, siehe (4.1)). Diese ergibt sich zu ([Mer80b], S. 11):

$$\Delta\nu = -\alpha \cdot \Delta T \cdot \nu_0 \quad . \quad (6.1)$$

Für den materialspezifischen *Ausdehnungskoeffizienten* α ist dabei der Wert für Aluminium einzusetzen, welcher mit $23,8 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ gegeben ist.

Bei einer Resonanzfrequenz von 1499,010 GHz ergibt sich für eine Temperaturdifferenz von einem Grad Celsius eine Frequenzverschiebung um -35,68 kHz. Diese soll bei der Wahl der Koppelstärke berücksichtigt werden.

6.1.2 Wahl der Koppelstärke

Wie in Abschnitt 3.6.2 beschrieben, wird der Wellenwiderstand $n^2 Z_0$ der äußeren Beschaltung als zusätzliche Last in den Resonator-Schwingkreis hineintransformiert. Je größer dieser eingekoppelte Widerstand und damit wegen (3.24) auch der Koppelfaktor κ , desto mehr wird der Schwingkreis durch ihn gedämpft. Die zusätzliche Verlustleistung P_{ext} steigt, womit dann die externe Güte Q_{ext} sinkt. Gleichung (3.22) kann man nun entnehmen, dass die von außen sichtbare Lastgüte des Resonators in diesem Fall kleiner wird. Dies bedeutet eine flachere Resonanzkurve, denn die Güte ist über $Q = \omega_0/\Delta\omega$ auch mit der Halbwertsbreite der Kurve verknüpft. Je stärker also die Kopplung κ , desto breiter die Kurve.

Die Schärfe der Resonanzkurve ist für die Temperaturempfindlichkeit des Resonators von entscheidender Bedeutung: Die Resonanzfrequenz ist, wie oben beschrieben, von der Temperatur abhängig, während die Anregungsfrequenz gleich bleibt. Will man also auch für leichte Temperaturabweichungen noch ein genügend hohes Signal erhalten, so ist eine ausreichend starke Kopplung vorzusehen. Letztere kann man durch die Variation der Antennenlänge einstellen.

Die absolute Höhe des Signals in Resonanz hängt davon ab, in wieweit der Koppelfaktor von der idealen Kopplung, also dem Fall $\kappa = 1$, abweicht. Nur für diesen ergibt sich die maximale Leistung³², was man auch (3.38), der Formel für die Signalleistung, entnehmen kann:

$$P_{\text{ext}} \propto \frac{\kappa}{(1 + \kappa)^2} \quad . \quad (6.2)$$

Ersetzt man dort die Lastgüte Q_L durch den mit (3.22) und (3.24) gegebenen Zusammenhang

$$Q_L = \frac{Q_0}{1 + \kappa} \quad , \quad (6.3)$$

³²vgl. Abschnitt 3.6.1 zur Leistungsanpassung

so erhält man nach Umformung den folgenden Ausdruck:

$$P_{\text{ext}} = R_s I^2 B^2 \frac{\kappa}{(1 + \kappa)^2 + 4Q_0^2 \left(\frac{\Delta\nu}{\nu_0}\right)^2} . \quad (6.4)$$

Dieser erlaubt es, die Leistung des Messsignals zu berechnen, wenn die Resonanzfrequenz ν_0 des Resonators um $\Delta\nu$ gegen die Anregungsfrequenz verschoben ist.

Damit kann auch die Verminderung der Signalleistung bei Abweichungen in der Temperatur ermittelt werden. Durch Umstellen von (6.1) erhält man einen direkten Zusammenhang zwischen Temperaturdifferenz ΔT und relativer Frequenzverschiebung $\Delta\nu/\nu_0$:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = -\alpha \cdot \Delta T . \quad (6.5)$$

Nach Einsetzen in (6.4) kann nun P_{ext} für verschiedene Werte der Koppelstärke κ gegen ΔT aufgetragen werden, siehe Abbildung 6.1. Es ist zu erkennen, dass für Koppelstärken kleiner Eins, also für *unterkritische* Kopplung³³, die Steilheit der Resonanzkurve kaum geringer ausfällt, als für den Fall *kritischer* Kopplung mit $\kappa = 1$. Dafür ist eine deutliche Verminderung der Leistung zu beobachten. Geht man zu *überkritischer* Kopplung über, so ist im Verhältnis zur Verbreiterung der Kurve ein deutlich geringerer Einbruch der Signalstärke zu verzeichnen.

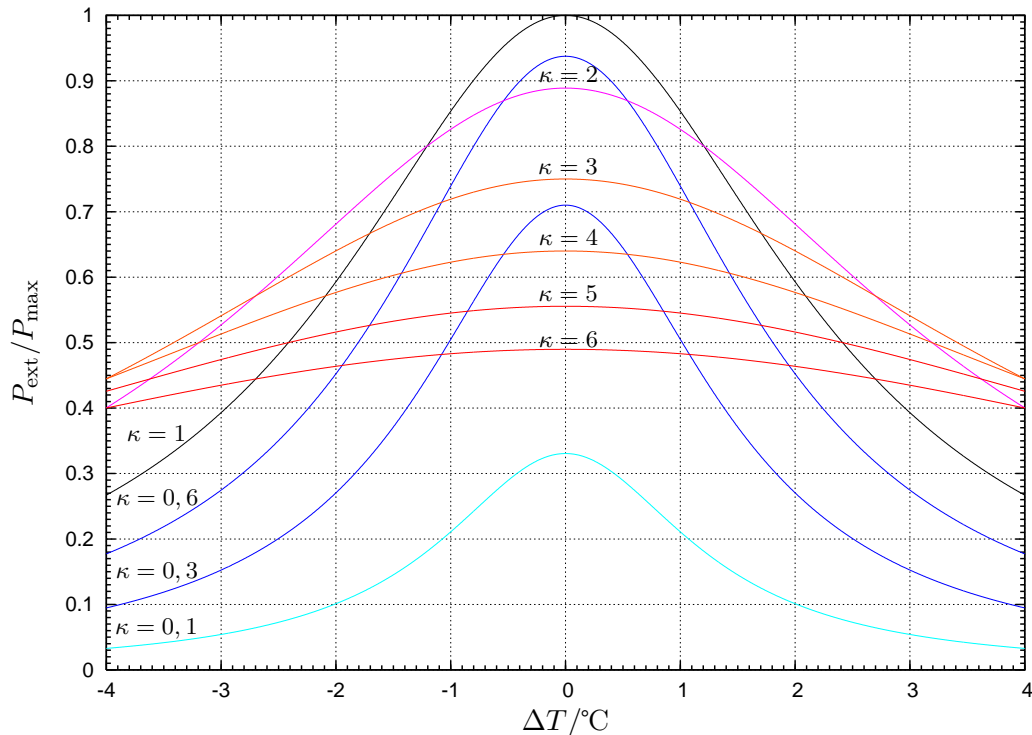


Abbildung 6.1: Die auf das Maximum P_{max} normierte Signalleistung P_{ext} in Abhängigkeit von der Temperaturdifferenz ΔT , geplottet für verschiedene Werte des Koppelfaktors κ

Je nach Temperaturstabilität des endgültigen Resonators kann also die Koppelstärke angepasst werden, um Leistungsschwankungen des Signals zu vermeiden. Der fertige Resonator

³³vgl. Abschnitt 3.6.2

soll mit einer Wasserkühlung ausgestattet werden, deren Effektivität dann maßgeblich für die endgültige Einstellung von κ sein wird. Geht man von einem halben Grad maximaler Differenz aus, so verliert man selbst bei für die Signalstärke optimaler Kopplung weniger als 5% des Pegels.

6.2 Abschätzung der Signalleistung

Mit der Wahl der Koppelstärke sind nun alle für die Berechnung der Signalleistung gemäß Formel (6.4) erforderlichen Größen bekannt, hier noch einmal die Zusammenfassung der Parameter:

Shuntimpedanz R_s : Sie ergibt sich aus MAFIA-Rechnungen, für eine Strahlablage von 9 mm liegt sie gemäß Tabelle 5.6 bei etwa 12,4 k Ω .

Strahlstrom I : Typische Werte sind hier 0,5–5 nA, je nach Anforderungen des Experiments.

Bunchfaktor B : Er trägt der Tatsache Rechnung, dass der Resonator bei der dreifachen Bunchfrequenz angeregt wird und hat, wie Tabelle 4.1 zu entnehmen ist, mindestens (für maximale Bunchlänge) einen Wert von 0,65.

Koppelfaktor κ : Wie dem vorangegangenen Abschnitt zu entnehmen ist, dürfte für die Koppelstärke ein Wert von $\kappa = 1$ für eine erste Abschätzung angemessen sein.

Kreisgüte Q_0 : Es handelt sich hierbei um die unbelastete Güte des Resonators. Diese ist ein Maß für seine Schwingungsdämpfung, wenn keine äußere Beschaltung zu zusätzlichen Verlusten führt. Aus der entsprechenden MAFIA-Rechnung ergibt sie sich für reines Aluminium als Resonatormaterial zu etwa 17400.

Für den angegebenen Wertebereich an Strahlströmen sind in Tabelle 6.1 die Signalleistung in Watt und dBm³⁴ angegeben. Diese Pegel bestimmen die Wahl der Komponenten der signalverarbeitenden Elektronik. Weiterhin kann mit den Werten aus Tabelle 5.6 ein Geradenfit von $R_s(x)$

I / A	$P_{\text{ext}} / \text{W}$	$P_{\text{ext}} / \text{dBm}$
0,1 nA	$1,32 \cdot 10^{-17}$	-139
0,5 nA	$3,29 \cdot 10^{-16}$	-125
1 nA	$1,32 \cdot 10^{-15}$	-119
5 nA	$3,29 \cdot 10^{-14}$	-105
10 nA	$1,32 \cdot 10^{-13}$	-99

Tabelle 6.1: Die für verschiedene Strahlströme bei einer Ablage von etwa 9 mm zu erwartende Signalleistung

gegen x^2 durchgeführt werden, da die Shuntimpedanz quadratisch von der Ablage abhängt. Es ergibt sich die folgende Geradengleichung:

$$R_s = 156,40 \Omega \text{ mm}^{-2} \cdot x^2 + 10,31 \Omega \quad . \quad (6.6)$$

In Abbildung 6.2 ist für vier verschiedene Ströme und eine Koppelstärke von Eins die Leistung gegen die Strahlablage in Millimetern aufgetragen.

³⁴Logarithmisches Leistungsmaß, bezogen auf eine Referenzleistung von 1 mW

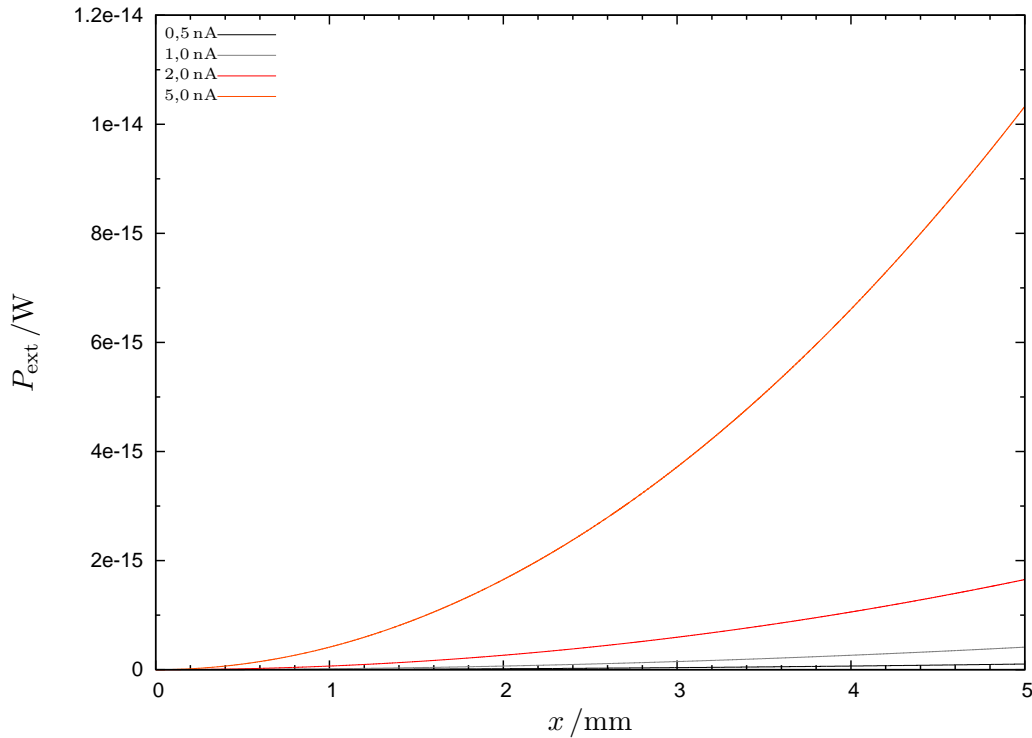


Abbildung 6.2: Die Signalleistung in Abhängigkeit von der Strahlablage, für vier verschiedene Strahlströme.

6.3 Berücksichtigung von Vakuum und Wasserkühlung

Wenn der fertige Resonator auf die beabsichtigte Betriebsfrequenz hin abgestimmt werden soll, so wird dies aus praktischen Gründen im belüfteten Zustand erfolgen. Damit können dann zum Beispiel die eventuell in ihren Abmessungen leicht zu verkürzenden Kapazitätszylinder schnell ein- und ausgebaut werden.

Dabei ist zu beachten, dass sich die Resonanzfrequenz durch das Evakuieren verstimmen wird. Dies liegt an der für Luft von Eins verschiedenen relativen Dielektrizitätskonstanten ε_r , welche sich auf einen Wert von 1,000576 beläuft.

Gemäß (3.8) ist die Resonanzfrequenz ν_0 proportional zu $1/\sqrt{\mu\varepsilon}$. Damit erhält man für die Beziehung zwischen ihren Werten $\tilde{\nu}_0$ in Luft und ν_0 im Vakuum den folgenden Ausdruck:

$$\tilde{\nu}_0 = \frac{\nu_0}{\sqrt{\varepsilon_r}} \quad (6.7)$$

Die Resonanzfrequenz ist in Luft also kleiner, es ergibt sich für $\nu_0 = 1,499010$ GHz dann eine Frequenz von $\tilde{\nu}_0 = 1,498578$ GHz. Die sich auf etwa 432 kHz belaufende Differenz wird also bei einer Abstimmung im belüfteten Zustand von der Zielfrequenz abgezogen werden müssen:

$$\tilde{\nu}_0 = \nu_0 - 432 \text{ kHz} \quad (6.8)$$

Dabei kann die erforderliche Korrektur je nach Wetterlage um einige ± 10 kHz schwanken ([Sch04], S. 5).

Neben dem besprochenen Effekt bei Evakuierung lässt sich nun noch die in Abschnitt 6.1.1 beschriebene Temperaturabhängigkeit berücksichtigen. Die Frequenzeinstellung des Resonators

u	r /m	$\frac{\Delta J_1}{J_1} / \%$
0,282	0,0089	1
0,397	0,0125	2
0,538	0,0170	3,71
0,622	0,0196	5
0,866	0,0274	10

Tabelle 6.2: Die relative Abweichung der Besselfunktion $J_1(u)$ in Bezug zu einer im Ursprung angelegten Tangente. In der mit r bezeichneten Spalte findet sich der zugehörige Radius beim Lageresonator, der Wert für das Strahlrohr ist umrandet.

wird bei Zimmertemperatur geschehen, an seinem Einsatzort wird er aber an den Kühlwasserkreislauf des Experimente-Niederdrucks angeschlossen werden. Dieser weist eine Temperatur von etwa 20°C auf.

Die Frequenzverschiebung pro Grad Celsius Temperaturerhöhung wurde in Abschnitt 6.1.1 zu $-35,68$ kHz ermittelt. Bei Abstimmung im belüfteten Zustand und unter Zimmertemperatur T berechnet sich die einzustellende Frequenz $\hat{\nu}_0$ dann wie folgt:

$$\hat{\nu}_0 = \nu_0 - 432 \text{ kHz} - (T - 20^\circ\text{C}) \cdot 36 \text{ kHz} . \quad (6.9)$$

Sowohl durch Evakuieren als auch durch Abkühlen erhöht sich also die Resonanzfrequenz.

6.4 Abschätzung des Messfehlers bei großen Strahlablagen

Wie in Abschnitt 3.2 ausgeführt, folgt die longitudinale z -Komponente des elektrischen Feldes der TM_{110} -Mode dem folgenden Verlauf:

$$E_z = E_0 J_1 \left(\underbrace{\frac{3,83171}{a} r}_{=:u} \right) \cos(\varphi) e^{i\omega t} . \quad (6.10)$$

Der zunächst recht lineare erste Anstieg der ersten Besselfunktion J_1 führt zu der Proportionalität (3.39), welche wiederum die Abhängigkeit der Signalleistung vom Quadrat der Ablage bedingt. Um zu überprüfen, bis zu welchen Ablagen die Linearität gewährleistet ist, kann man nun die relative Abweichung $\Delta J_1(u)/J_1(u)$ betrachten. Dabei bezeichnet $\Delta J_1(u)$ die Differenz zwischen einer im Ursprung als Tangente an $J_1(u)$ gelegten Geraden (die Steigung beträgt 0,5) und der Besselfunktion selbst.

In Tabelle 6.2 ist die relative Abweichung in Prozent für verschiedene Argumente u angegeben, zusammen mit dem umgerechneten Wert r für die senkrecht zur Symmetrieebene der TM_{110} -Mode gemessene Entfernung von der Resonatorachse. Der Strahlrohrradius von 0,017 m ist dabei gesondert kenntlich gemacht.

Des Weiteren ist in Abbildung 6.3 der Verlauf der Besselfunktion zusammen mit der Näherungsgraden dargestellt. Im Rahmen der Auslesesoftware, welche das von der weiterverarbeitenden Elektronik aufbereitete Lagesignal im Kontrollsystem verwaltet und zur Anzeige bringt, kann man den nicht ganz linearen Verlauf zu kompensieren versuchen, die Abweichung liegt für Ablagen von etwa 10 mm knapp unter 2%.

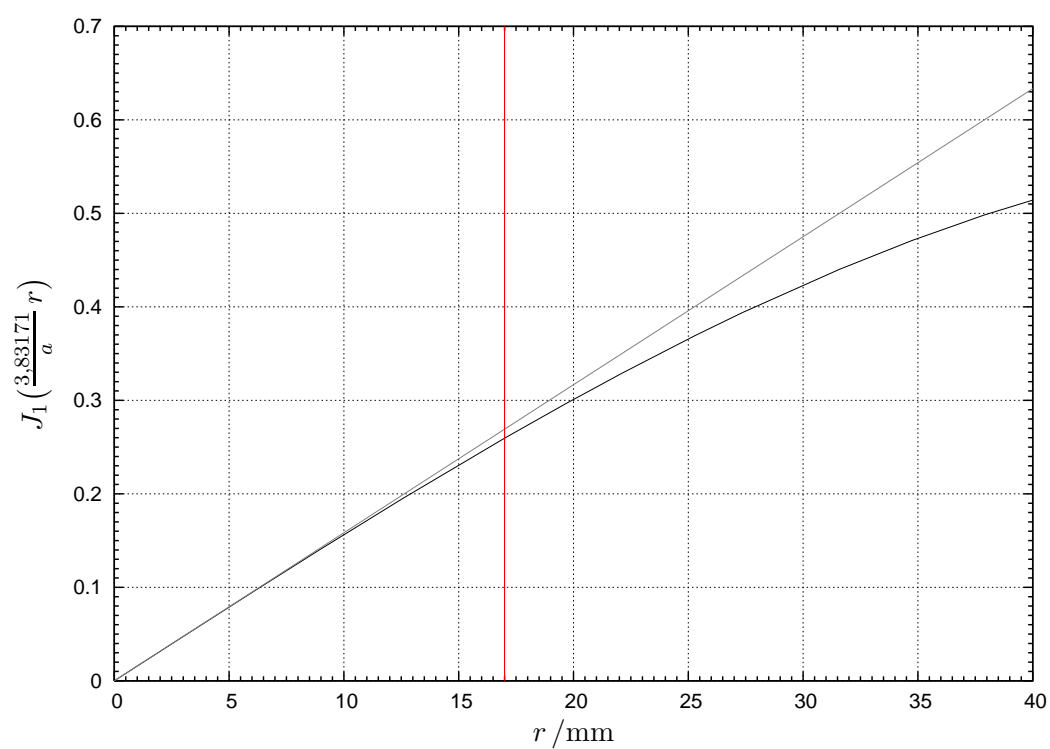


Abbildung 6.3: Die Besselfunktion J_1 mit linearer Näherung. Der senkrechte Strich kennzeichnet den Strahlrohrradius von 17 mm.

7 Die Ausleseelektronik

7.1 Grundlagen des Aufbaus

Um aus dem Hohlraumresonator ein verwendbares Lagesignal extrahieren zu können, muss das aus ihm ausgekoppelte, sehr schwache Wechselspannungssignal verstärkt und in eine Gleichspannung umgewandelt werden. Der zu diesem Zweck gestaltete Aufbau aus HF-Komponenten ist in Abbildung 7.1 dargestellt³⁵.

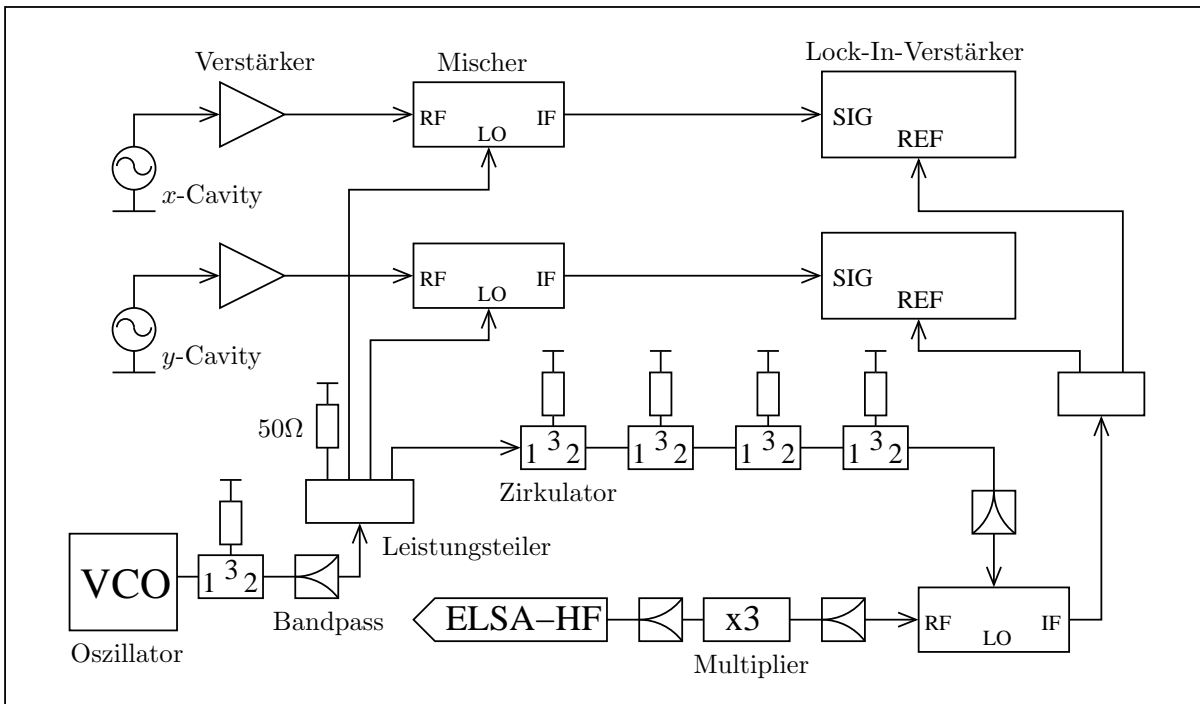


Abbildung 7.1: Der Aufbau der Elektronik zur Lagemessung

Ziel ist es, sich die Tatsache zu Nutze zu machen, dass mit der Beschleuniger-Hochfrequenz ein starkes, unverraushtes Signal mit phasenstarrer Beziehung zum unterhalb des Rauschpegels liegenden Nutzsignal vorliegt³⁶. Dies kann mittels eines Lock-In-Verstärkers geschehen, da dieser aus einem verrauschten Signal genau diejenige Frequenzkomponente herausfiltert und verstärkt, welche durch das Signal an dessen Referenzeingang vorgegeben wird (vgl. Abschnitt A.3 im Anhang). Da die Lagemessung den Einsatz je eines Resonators für die horizontale und vertikale Positionsbestimmung erfordert, werden dementsprechend zwei dieser Geräte benötigt.

Für den beabsichtigten Einsatz geeignete Lock-In-Verstärker verarbeiten typischerweise Frequenzen von unter 100 kHz. Daher ist es erforderlich, sowohl Referenz- als auch Nutzsignal von den etwa 1,5 GHz auf Werte unter 100 kHz herabzusetzen. Dies geschieht über sogenannte Mischer, welche an ihrem mit IF³⁷ gekennzeichneten Ausgang unter anderem ein Signal mit der Differenzfrequenz ihrer beiden Eingänge liefern. Dieses ist in seiner Amplitude dann proportional zum Nutzsignaleingang RF³⁸ (vgl. Abschnitt A.4).

³⁵Die Schaltung beruht auf einem Entwurf von Herrn Peter Jennewein, Institut für Kernphysik, Johannes Gutenberg Universität Mainz.

³⁶Gemäß Abschnitt 2.1 prägt ja die zur Beschleunigung verwendete Frequenz dem Strahl eine Bunchstruktur gleicher Zeitabfolge auf, welche dann wiederum die stehenden Wellen im Hohlraumresonator anregt.

³⁷für engl. „intermediate frequency“, im Deutschen als *Zwischenfrequenz* bezeichnet

³⁸für engl. „radio frequency“, synonym für Hochfrequenz verwendet

Der zweite Eingang, mit LO³⁹ bezeichnet, muss also mit einem Signal einer Frequenz beschickt werden, die um maximal 100 kHz von der erwarteten Nutzfrequenz abweicht. Dafür kann man einen zusätzlichen Oszillator verwenden, welcher ohne feste Phasenbeziehung zur Hochfrequenz laufen darf, aber in der Frequenz ausreichend stabil sein muss.

Da sich die mit vertretbarem Aufwand herstellbaren Oszillatoren bei den am Einsatzort kaum zu vermeidenden Temperaturschwankungen in ihrer Frequenz verschieben, ist es erforderlich, einen in seiner Frequenz verstellbaren Oszillator vorzusehen. Über die Variation der Abstimmspannung können dann Frequenzverschiebungen, die unter Umständen zu einer Mischerausgangsfrequenz von über 100 kHz führen würden, kompensiert werden⁴⁰. Mittels eines Leistungsteilers kann das Oszillatorsignal an alle drei Mischer (je einer für die x - und y -Signale, ein weiterer für die Beschleuniger-HF) weitergegeben werden.

Folgende Komponenten vervollständigen den Aufbau:

- Um ein Referenzsignal bei der gleichen Frequenz wie das Lagesignal zu erhalten, muss die Beschleuniger-HF von nominell 499,67 MHz durch einen Verdreifacher auf die Betriebsfrequenz des Monitors bei etwa 1,5 GHz heraufgesetzt werden.
- Da an bestimmten Stellen im Aufbau, insbesondere nach dem Verdreifacher sowie am Ausgang des Oszillators, unerwünschte Frequenzkomponenten auftreten können, sind dort Bandpässe vorgesehen.
- Schließlich ist dafür Sorge zu tragen, dass das Signal der Beschleuniger-HF nicht über den Mischer und dann den Leistungsteiler auf den Nutzfrequenzweig gleicher Frequenz aufgeprägt wird und dann am Lock-In-Verstärker für einen Offset sorgt. Aus diesem Grunde sind die vier Zirkulatoren zwischen Beschleuniger HF und Leistungsteiler vorgesehen, welche wegen ihrer relativen Schmalbandigkeit durch einen weiteren Bandpass ergänzt werden.

Für die Spezifikation der einzelnen Bauteile spielen folgende Fragestellungen eine Rolle, welche je nach Komponente unterschiedlich stark ins Gewicht fallen:

Dämpfung: Wieviel Leistung geht in dem Bauteil verloren?

Unerwünschte Frequenzkomponenten: Treten neben dem Nutzfrequenzsignal noch weitere Frequenzen am Ausgang eines Bauteils auf, welche die Funktion der Schaltung beeinflussen könnten? Wenn ja, in welcher Stärke relativ zum Nutzpegel?

Linearität: Gilt die möglichst exakte Proportionalität von Größen über den gewünschten Arbeitsbereich?

Isolation: Wie gut sind verschiedene Anschlüsse eines Bauteils voneinander isoliert, so dass sich störende Signale nicht über die Schaltung ausbreiten können?

Leistungspegel: Liegen an den Eingängen der Bauteile ausreichende Leistungen an, um den störungs- und verzerrungsfreien Betrieb zu garantieren?

7.2 Die verwendeten Komponenten

In den folgenden beiden Abschnitten soll die Auswahl der Komponenten erläutert werden, welche unter Berücksichtigung der genannten Fragestellungen getroffen wurde. Dabei sind die angegebenen Leistungsmerkmale aus den Datenblättern und Messkurven entnommen, die von Herstellerseite den Komponenten beigelegt wurden.

³⁹engl. „local oscillator“

⁴⁰Deshalb wird der Oszillator dann auch kurz mit VCO für engl. „voltage controlled oscillator“ bezeichnet.

7.2.1 Der Nutzsignalzweig

Am Nutzsignaleingang der Schaltung liegt das Lagesignal aus den Hohlraumresonatoren an, in Abbildung 7.1 links oben dargestellt. Dieses ist in seiner Stärke auf etwa 10^{-20} W einzuschätzen, was in etwa -170 dBm⁴¹ entspricht.

Vor der weiteren Verarbeitung wird zunächst der Signalpegel durch einen rauscharmen Verstärker von **Miteq** (Rauschzahl 0,4 dB) um etwa 60 dB auf -110 dBm angehoben. Die Linearität des Verstärkers ist mit ± 1 dB spezifiziert.

Die im Signalweg nachfolgenden Mischer sind insbesondere auf ihre hohe Isolation hin ausgewählt worden, um unerwünschten Signalkomponenten die Verbreitung in der Schaltung zu erschweren. Zwischen den drei Anschlüssen wird typischerweise um 40 dB gedämpft, mit möglichen Abweichungen bis auf minimal 30 dB hinunter. Das am Zwischenfrequenz-Ausgang anfallende Signal wird dann auf den Signaleingang eines von zwei Lock-In-Verstärkern gegeben.

7.2.2 Der Referenzsignalzweig

Zur phasensensitiven Verstärkung (vgl. Abschnitt A.3) des verrauschten Nutzsignals benötigt der Lock-In-Verstärker noch ein Referenzsignal, welches bei der gleichen Frequenz wie das Nutzsignal liegt und zu diesem eine phasenstarre Beziehung aufweist. Dazu soll die Beschleuniger-Hochfrequenz ν_{HF} herangezogen werden (in Abbildung 7.1 ist unten in der Mitte die Signalquelle eingezeichnet), deren Signal allerdings wegen des Betriebs des Monitors bei der dritten Harmonischen $3 \cdot \nu_{\text{HF}}$ zunächst in seiner Frequenz verdreifacht werden muss.

Dies geschieht durch einen Vervielfacher (engl. „Multiplier“), welcher ein möglichst spektral reines Ausgangssignal aufweisen sollte. Bei dem im vorliegenden Aufbau verwendeten Bauteil von **Wenzel Associates** liegen die Subharmonischen der Ausgangsfrequenz bei weniger als -25 dBc⁴², die Harmonischen unter -50 dBc.

Um das Eingangssignal des Verdreifachers von störenden Frequenzkomponenten frei zu halten, ist ein Bandpass um 500 MHz vorgesehen, am Ausgang ist ein entsprechendes Filter für 1,5 GHz (**Lark Engineering**) angeschlossen. Es weist eine 3 dB-Bandbreite⁴³ von 200 MHz auf und sperrt bei 2 GHz um -45 dBc.

Nach dem 1,5 GHz-Filter wird das Signal auf einen Mischer gegeben, welcher baugleich zu den im Nutzsignalzweig verwendeten Komponenten ist. Am Ausgang des Mixers liegt schließlich das Signal für den Referenz-Eingang des Lock-In-Verstärkers an.

7.2.3 Der Oszillator-Zweig

Der zum Heruntermischen der Referenz- und Nutzsignale notwendige Oszillator muss folgende Eigenschaften aufweisen:

Ausgangspegel: Um die Mischer mit einem vom Pegel am LO-Eingang unabhängigen Ausgangssignal betreiben zu können, müssen sie dort eine Mindestleistung von 7 dBm zur Verfügung gestellt bekommen. Die Summe der Dämpfungen der einzelnen Bauteile zwischen Oszillator und Mischer darf deshalb einen bestimmten Wert nicht übersteigen. Mit dem Oszillator von **EMF Systems** steht im vorliegenden Aufbau ein Ausgangssignal von 17,1 dBm zur Verfügung.

⁴¹Es handelt sich bei der Einheit dBm um ein absolutes, logarithmisches Leistungsmaß, welches sich aus der Einheit dB durch die Wahl von 1 mW als Bezugsgröße ergibt.

⁴²Dieses logarithmische Leistungsmaß gibt das Verhältnis einer Messgröße zu einer Bezugsgröße, dem „carrier“ an. Im vorliegenden Fall handelt es sich bei letzterer um das Ausgangssignal mit der verdreifachten Eingangsfrequenz.

⁴³die Halbwertsbreite der Transmissionskurve

Zwischen dem Oszillator und den Mischern für die Lagesignale fallen dabei am Zirkulator 0,3 dB und am Bandpass 1 dB ab. Am Leistungsteiler reduziert sich der Pegel noch einmal um 6 dB, da die Leistung geviertelt⁴⁴ wird. Zusammen mit der eigentlichen Dämpfung von 0,8 dB erreicht den LO-Eingang dann ein mit 9 dB ausreichender Pegel. Bei den Angaben zur Dämpfung handelt es sich um Maximalwerte.

Verstimmung: Um thermisch bedingte Frequenzverschiebungen im Oszillatorsignal kompensieren zu können, wurde eine verstimmbare Ausführung gewählt. Angegeben ist die Temperaturstabilität mit einer Abweichung von 30 kHz pro °C. Die Mittenfrequenz ist mit 1499 MHz spezifiziert und kann über das Anlegen einer Abstimmspannung von 0–12 V um ± 2 MHz variiert werden, was eine Frequenzdifferenz von 30 kHz pro Millivolt bedeutet. Die Spannung soll von einer D/A-Wandler-Karte geliefert werden, welche in den zur Auslese der Lock-In-Daten vorgesehenen PC eingebaut ist. Da neben den eigentlichen Messwerten auch die Frequenz des am Lock-In-Verstärker anliegenden Referenzsignals erfasst werden kann, ist eine laufende Überprüfung und bei Bedarf auch Nachregelung der Oszillatorfrequenz möglich.

Spektrale Reinheit: Die Harmonischen der Oszillatorfrequenz sind laut Spezifikation um -20 dBc unterdrückt, die mit „spurious“⁴⁵ bezeichneten Signale um -80 dBc.

Pulling: Je nach Last kann sich die Frequenz verschieben, maximal um 1 MHz.

Pushing: Schwankungen in der Spannungsversorgung können ebenfalls die Frequenz verändern, die Obergrenze ist mit 0,1 MHz/V angegeben.

7.3 Untersuchung des Signalverhaltens

In ersten Testmessungen mit der Lageelektronik und den Lock-In-Verstärkern haben sich folgende Erkenntnisse ergeben:

- Der Lock-In-Verstärker zeigt auch ohne Eingangssignal einen deutlich über dem zu erwartenden, durch das Rauschen bestimmten Minimalwert liegenden Pegel an, auch wenn an den Verstärker-Eingängen kein Signal anliegt. Vielversprechend erscheint in dieser Hinsicht der Ansatz der Massentrennung aller Komponenten von der Masse des HF-dichten Gehäuses, welches den Gesamtaufbau aufnimmt. Im vorläufigen Aufbau sind alle Komponenten über ihr Gehäuse leitend mit der metallischen Grundplatte verbunden.
- Mit einem Spektrum-Analysator konnten im Signal, welches am Lock-In-Verstärker-Eingang anliegt, störende Frequenzkomponenten im Bereich unter 100 kHz gefunden werden, welche sich dem Nutzsignal überlagern könnten. Der Einsatz zusätzlicher Tiefpässe könnte Abhilfe schaffen.
- Das verwendete Netzteil der Firma **Kniel** weist laut Spezifikation Schaltfrequenzen im Bereich von 50–190 kHz auf. Diese ließen sich, etwa über das Hinzuschalten von Kondensatoren, unterdrücken.

Bei den technischen Angaben aus den vorangegangenen Abschnitten handelt es sich um die herstellerseitig garantierten Spezifikationen, die allerdings einer genaueren Überprüfung unterzogen werden sollten.

⁴⁴Wegen der schlechteren Isolation (15 dB statt 22 dB) wird hier auf einen Dreifachteiler verzichtet und stattdessen bei dem vorliegenden Bauteil der vierte, ungenutzte Ausgang mit dem Wellenwiderstand (50Ω) abgeschlossen.

⁴⁵Es handelt sich um unerwünschte Frequenzkomponenten im Ausgangssignal, die entweder durch äußeren Einfluss (Netzfrequenz, Schaltfrequenz des Netzteils etc.) auf die Oszillatorfrequenz aufmoduliert werden oder bei der Generierung des Oszillatorsignals mittels Frequenzmischung entstehen.

8 Zusammenfassung und Ausblick

Die Strahldiagnose mittels Hochfrequenzresonatoren an einem Elektronenstrahl ist wegen dessen periodischer Struktur und der damit verbundenen Anregung stehender Wellen in einem Resonator möglich. Dabei steht auf Grund der endlichen longitudinalen Ausdehnung eines einzelnen Elektronenpaketes ein ganzes Spektrum an Anregungsfrequenzen zur Verfügung, welches sich aus den ganzzahligen Vielfachen der Beschleuniger-Hochfrequenz zusammensetzt.

Der Resonator lässt sich in seinen wesentlichen Eigenschaften über das Ersatzschaltbild eines Schwingkreises verstehen, welcher in seiner Resonanzfrequenz auf eine der Anregungsfrequenzen eingestimmt ist. Allerdings ergibt sich in Erweiterung zum Schwingkreis ein ganzes Spektrum an Resonanzfrequenzen: Die Beschreibung über das Ersatzschaltbild ist also nur zulässig, wenn sich die weiteren Resonanzen in ausreichendem Abstand von der zu nutzenden Resonanz befinden.

Mit einem Separationsansatz für die aus den maxwellschen Gleichungen hervorgehende Wellengleichung werden die möglichen Eigenschwingungen des Resonators als Lösungen eines Eigenwertproblems ersichtlich: Ein metallischer Hohlzylinder stellt eine erste Randbedingung für die Wellenausbreitung dar. Davon ausgehend kann dann durch die Einführung leitender Abschlusswände der Resonator betrachtet werden.

Die unendlich vielen möglichen Eigenschwingungen werden in zwei Klassen gegliedert und dann anhand dreier ganzzahliger Indizes unterschieden, welche in jeder der drei Koordinatenrichtungen aus der jeweiligen Randbedingung hervorgehen. Der radiale Feldverlauf im zylindrischen Hohlraum wird je nach Mode durch Besselfunktionen verschiedener Ordnungen beschrieben, welche maßgeblich die beiden insbesondere für die Strahldiagnose interessanten Feldverteilungen prägen: Die TM_{010} -Mode zur Intensitätsmessung, die TM_{010} -Mode zur Lagebestimmung.

Die parallel zum Elektronenstrahl liegende elektrische Feldkomponente dieser Moden erlaubt die Anregung durch den Strahl, wobei im Falle der Intensitätsmessung nahe der Strahlachse ein hohes Feld mit einem gegen Abweichungen unempfindlichen Verlauf auftritt. Bei der Lagemessung ermöglicht es der mit dem Abstand von der Achse lineare Anstieg des Feldes ein von der Position des Strahls abhängiges Signal zu gewinnen, welches je nach durchtretener Hälfte des Resonators einen anderen Phasenunterschied zur Hochfrequenz aufweist.

Die Signalleistung beinhaltet neben einer Abhängigkeit vom Quadrat der Strahllage auch eine quadratische Abhängigkeit vom Strahlstrom, weswegen ein System zur absoluten Strahllagemessung auf einen Intensitätsmonitor angewiesen ist.

Vorteil der Lagemessung mit einem Resonator ist die Resonanzüberhöhung des Signals bei abgestimmter Anregung, welche sich in Güten weit über dem Wert von 10.000 ausdrückt. Ausserdem ermöglicht es insbesondere diese Methode, die Eigenschaften des Teilchenstrahls in verschwindend geringem Maße zu beeinflussen und somit auch eine Strahllagemessung während der Datennahme am Experiment durchzuführen.

Grundlegend vereinfacht wird die Konzeption eines Hohlraumresonators über die Computersimulation der Feldverteilungen mit einem Programmpaket wie MAFIA. Damit lassen sich Geometriedetails auf ihre Wirkung hin untersuchen, so dass ohne das aufwendige Anfertigen einer Reihe von Prototypen der letztendliche Bau des Monitors schon an Hand genauer Vorgaben erfolgen kann.

Das bis zu kleinen Ablagen hin beliebig kleine Messsignal wird für die im Wesentlichen im Wertebereich von einigen Nanoampere anzusetzenden Strahlströme kaum über die Größenordnung Femtowatt hinausgehen, was hohe Anforderungen an die zur Weiterverarbeitung verwendete Elektronik stellt.

Der Lock-In-Verstärker stellt deshalb die zentrale Komponente des Auslesekonzeptes dar, da er die verrauschten Nutzsignale unter Einbezug ihrer festen Phasenlage zur Beschleuniger-Hochfrequenz gezielt verstärken kann.

An Hand erster Messungen zeigt es sich, dass die Lageelektronik in einigen Punkten noch der genaueren Untersuchung und Weiterentwicklung bedarf: Insbesondere eine saubere Trennung der Massen erscheint erfolgversprechend, um bei einer simulierten Nulllage dann auch ein verschwindend geringes Messsignal zu erhalten. Dann kann ein entsprechend abgeschwächtes Signal aus einem Frequenzgenerator zur Nachahmung einer realen Strahlablage verwendet werden, bevor in einem letzten Schritt das System am laufenden Beschleuniger getestet wird.

Konstruktionszeichnungen zum Lagemonitor wurden von einem Mitarbeiter aus der Arbeitsgruppe schon erstellt, so dass zeitnah der Bau des Resonators erfolgen kann. Mittels weitergehender Untersuchungsmethoden wie der vektoriellen und skalaren Netzwerkanalyse werden dann auch die Koppelung des Resonators eingestellt und seine Feldeigenschaften vermessen werden können.

A Anhang

A.1 Wellenausbreitung in Leitern

Um die Feldverteilung in einem Hohlraumresonator zu beschreiben, kann als allgemeinerer Fall die Wellenausbreitung in einem hohlen Rohr mit leitenden Wänden herangezogen werden. Die Lösung der maxwellschen Gleichungen führt unter diesen Randbedingungen zu einer unendlichen Reihe verschiedener Feldgeometrien, unter denen eine Wellenausbreitung möglich ist. Führt man nun als zusätzliche Randbedingung leitende Wände ein, die das Rohr an seinen Enden abschließen, so erhält man einen Hohlraumresonator. Die am Rohr gewonnenen Ergebnisse können so auch mathematisch in einfacher Weise auf den Fall des Resonators verallgemeinert werden.

A.1.1 Die Maxwellgleichungen in Zylindersymmetrie

Interessant ist für den letztendlich zu betrachtenden Fall eines zylindrischen Resonators die Wellenausbreitung entlang eines runden Hohlleiters. Zu lösen sind in diesem Fall die Maxwellgleichungen in Abwesenheit von Ladungen und Strömen. Diese lauten für den Fall einer sinusförmigen Zeitabhängigkeit $e^{i\omega t}$ dann (die Darstellung in diesem Abschnitt folgt [Jac98], S. 356f):

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= i\omega \vec{B} & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= -i\mu\epsilon\omega \vec{E} & \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Der Einfluss eines beliebigen Füllmediums kann als Zahlenfaktor in der Dielektrizitätskonstanten ϵ und der Permeabilität μ berücksichtigt werden.

Durch elementare Umformungen erhält man aus (A.1) die folgende Wellengleichung für elektrische und magnetische Felder:

$$(\Delta + \mu\epsilon\omega^2) \begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{Bmatrix} = 0 \quad (\text{A.2})$$

Aufgrund der Symmetrie des Problems bietet sich die Wahl von Zylinderkoordinaten an (Abbildung A.1), in denen sich der Laplace-Operator aus (A.2) wie folgt ausdrücken lässt:

$$\Delta = \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}}_{=:\Delta_{\perp}} + \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial z^2}}_{=:\Delta_{\parallel}} \quad (\text{A.3})$$

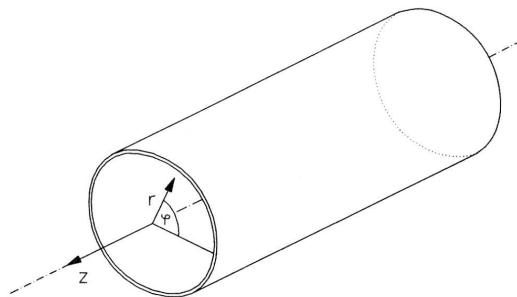


Abbildung A.1: Wahl der Zylinderkoordinaten bei einem Hohlrohr ([Wil92], S. 178)

Dabei wurde schon eine Trennung in einen transversalen Anteil Δ_{\perp} und einen longitudinalen Anteil Δ_{\parallel} vorgenommen. Offensichtlich lässt sich ein Separationsansatz für die räumlichen Anteile der Felder aufstellen, welcher die z -Abhängigkeit abtrennt:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{E}(r, \varphi, z) \\ \vec{B}(r, \varphi, z) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{E}(r, \varphi) e^{\pm ikz} \\ \vec{B}(r, \varphi) e^{\pm ikz} \end{array} \right. . \quad (\text{A.4})$$

Nach Einsetzen von (A.4) in (A.2) reduziert sich die Wellengleichung auf die folgende zweidimensionale Form:

$$\left(\Delta_{\perp} + (\mu\varepsilon\omega^2 - k^2) \right) \left\{ \begin{array}{l} \vec{E} \\ \vec{B} \end{array} \right\} = 0 . \quad (\text{A.5})$$

Spaltet man nun die Felder in longitudinale und transversale Komponenten auf, so stellt man mit der in (A.4) angegebenen z -Abhängigkeit fest (siehe [Jac98], S.357f), dass die Angabe des Betrags der z -Komponenten genügt, um daraus die transversalen Felder berechnen zu können.

A.1.2 Klassifikation der Lösungen nach Randbedingungen

Für die idealisierende Annahme perfekt leitender Wände ergibt sich, dass es keine Komponente des elektrischen Feldes parallel zur Wand geben kann, da diese ja sofort durch Ladungsverschiebungen kompensiert werden würde, es gilt (vgl. für diesen Abschnitt [Jac98], S. 359)

$$\vec{n} \times \vec{E} = 0 , \quad (\text{A.6})$$

wobei \vec{n} den Normalenvektor auf die Zylinderoberfläche bezeichnet. Weiterhin würde eine zeitlich variierende \vec{B} -Feld-Komponente senkrecht zur Wand zu tangentialen \vec{E} -Feldern führen, weswegen

$$\vec{n} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{A.7})$$

eine Einschränkung für das Magnetfeld darstellt.

Damit ergeben sich für die z -Komponenten der Felder die folgenden Randbedingungen:

$$E_z|_S = 0 \quad (\text{A.8})$$

und

$$\left. \frac{\partial B_z}{\partial n} \right|_S = 0 . \quad (\text{A.9})$$

Hierbei bezeichnet S die Mantelfläche des Rohres.

Nun stellt (A.5), zusammen mit (A.8) und (A.9), ein Eigenwertproblem dar. Im Falle eines Wellenleiters führt dies dazu, dass bei einer vorgegebenen Frequenz ω die Wellenzahl k nur bestimmte Werte annehmen kann. Umgekehrt sind vom Standpunkt einer vorgegebenen Hohlraum-Geometrie im Falle einer bestimmten Wellenzahl k nur bestimmte Werte für die Frequenz ω möglich, die auch als *Eigenschwingungen* oder *Moden* bezeichneten Resonanzen des Resonators.

Durch die unterschiedlichen Randbedingungen für E_z und B_z zerfallen die Lösungen in zwei verschiedene Klassen, nämlich die

- *transversal magnetischen (TM) Wellenformen*,
mit Randbedingung (A.8) und $B_z = 0$ überall,

sowie die

- *transversal elektrischen (TE) Wellenformen*,
mit Randbedingung (A.9) und $E_z = 0$ überall.

A.1.3 Kreiszyllindrische Wellenleiter und deren Moden

Die z-Komponenten der Felder in einem Hohlleiter müssen also unter den oben besprochenen Bedingungen Gleichung (A.5) genügen, hier noch einmal wiederholt (vgl. für Teile der folgenden Diskussion [Jac98], S. 360f):

$$\left(\Delta_{\perp} + \underbrace{(\mu\varepsilon\omega^2 - k^2)}_{=:k_c^2}\right) \begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{Bmatrix} = 0 . \quad (\text{A.10})$$

Dabei wurde eine übliche Bezeichnung für die Eigenwerte des Problems eingeführt, das Quadrat der sogenannten *Grenzwellenzahl* k_c . Dass diese Eigenwerte mit k_c^2 korrekterweise als positive Größe benannt worden sind, ist aus den Randbedingungen ersichtlich: Wäre nämlich die Größe k_c^2 negativ, so würde dies implizieren, dass die Anwendung der in Δ_{\perp} enthaltenen zweifachen Ableitung auf die Lösung ein positives Vorzeichen ergäbe. Damit würde die Lösung nicht oszillieren und demzufolge auch nicht die Bedingungen (A.8) bzw. (A.9) auf gegenüberliegenden Seiten des Zylinders erfüllen können.

Zu erwarten ist nun ein ganzes Spektrum von Eigenwerten k_c^i , mit $i = 1, 2, \dots$, wobei die zugehörigen Lösungen als *Moden* des Leiters bezeichnet werden. Für eine z.B. durch einen Hochfrequenzsender vorgegebene Frequenz ω läßt sich nun für jeden Eigenwert k_c^i die zugehörige Wellenzahl k_i finden, mit der sich die Welle in longitudinaler Richtung im Hohlleiter ausbreiten kann:

$$(k_i)^2 = (k_c^i)^2 - \mu\varepsilon\omega^2 . \quad (\text{A.11})$$

Allerdings führt dieser Zusammenhang nicht immer auf ausbreitungsfähige Feldkonfigurationen: In der mathematischen Beschreibung der Lösung der Wellengleichung findet sich k_i im Argument einer Exponentialfunktion wieder, siehe (A.4). Je nach Vorzeichen von $(k_i)^2$ wird k_i komplex oder reell, was zu schwingenden oder exponentiell abfallenden Lösungen führt. Für den Grenzfall $(k_c^i)^2 = \mu\varepsilon\omega^2$ läßt sich die sogenannte *Cut-Off-Frequenz* oder *Grenzfrequenz* ω_i definieren:

$$\omega_i = \frac{k_c^i}{\sqrt{\mu\varepsilon}} . \quad (\text{A.12})$$

Damit wäre dann

$$k_i = \sqrt{\mu\varepsilon} \sqrt{\omega^2 - \omega_i^2} . \quad (\text{A.13})$$

Für jede Mode gibt es also eine Frequenz, unterhalb derer die Wellen im Rohr gedämpft werden. Eine Ausbreitung ist dann nicht möglich, man spricht von *evaneszenten Wellen*. Einen Eindruck von den ersten Moden eines Hohlleiters vermittelt Abbildung A.2.

A.1.4 Die Feldgeometrien der einzelnen Moden

Nun soll die Wellengleichung (A.10) konkret gelöst werden, hier noch einmal aufgeschrieben mit dem Symbol Ψ , welches stellvertretend für E bzw. H steht:

$$(\Delta_{\perp} + k_c^2)\Psi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right) \Psi + k_c^2 \Psi = 0 . \quad (\text{A.14})$$

Ein Separationsansatz wie

$$\Psi(r, \varphi) = R(r) \Theta(\varphi) \quad (\text{A.15})$$

führt nach Einsetzen auf folgende Lösungen:

$$R(r) = C \cdot J_m(k_c r) + D \cdot N_m(k_c r) \quad (\text{A.16})$$

$$\Theta(\varphi) = A \cdot \cos(m\varphi) + B \cdot \sin(m\varphi) \quad (\text{A.17})$$

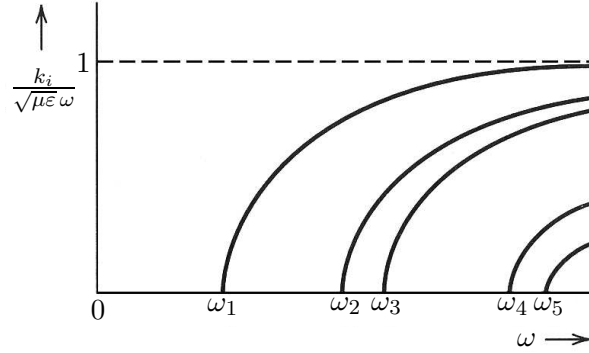


Abbildung A.2: Wellenzahl k_i gegen die Frequenz ω für verschiedene Moden i . Erst ab der mit ω_i bezeichneten jeweiligen Grenzfrequenz ist die Wellenausbreitung bei dieser Mode möglich ([Jac98], S. 361).

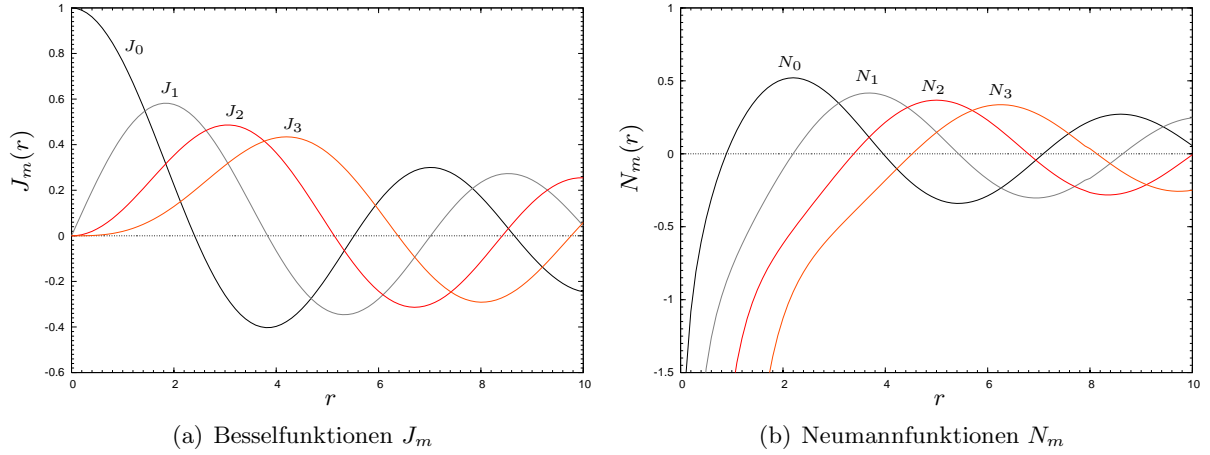


Abbildung A.3: Die Bessel- und Neumannfunktionen, jeweils in ihren ersten vier Ordnungen.

Aufgrund der Zylindersymmetrie tauchen hier die Bessel- bzw. Neumannfunktionen m -ter Ordnung auf, bezeichnet als J_m bzw. N_m . Aus physikalischen Gründen scheiden die Neumannfunktionen aus, da sie, wie Abbildung A.3(b) zu entnehmen ist, auf der Zylinderachse singulär werden. Es bleibt also, auf diese Lösungen die Randbedingungen (A.8) und (A.9) anzuwenden, der Radius des Rohres wird hier mit a bezeichnet:

- *TE-Moden:* Die Randbedingung

$$E_z = 0, \quad \left. \frac{\partial H_z}{\partial n} \right|_{r=a} = 0 \quad (\text{A.18})$$

führt auf

$$H_z = H_{mn} \cdot J_m(k_c r) \cdot \cos(m \varphi), \quad (\text{A.19})$$

wobei $k_c a = j'_{mn}$, n -te Lösung von $J'_m(k_c a) = 0$. Der Strich $'$ bezeichnet die Ableitung nach dem Radius, also gemäß (A.18) nach der zur Mantelfläche senkrecht stehenden Koordinatenachse. Die Zahlen m und n , welche eine bestimmte Mode kennzeichnen, werden bei deren Bezeichnung TE_{mn} als Index beige stellt.

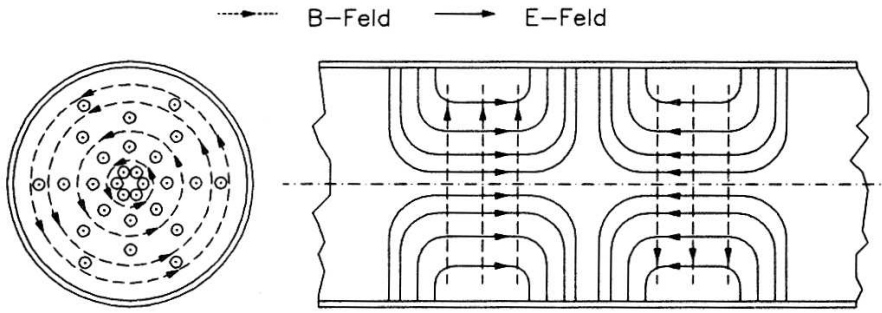


Abbildung A.4: Die Feldverteilung der TM_{01} -Hohlleitermode im runden Rohr ([Wil92], S. 178)

- *TM-Moden:* Mit der Randbedingung

$$H_z = 0, \quad E_z|_{r=a} = 0 \quad (\text{A.20})$$

ergibt sich dann

$$E_z = E_{mn} \cdot J_m(k_c r) \cdot \cos(m \varphi), \quad (\text{A.21})$$

wobei $k_c a = j_{mn}$, n -te Lösung von $J_m(k_c a) = 0$. Analog zu den TE-Moden werden sie mit TM_{mn} bezeichnet .

Der Index m gibt die Anzahl der Wellenlängen an, über die das Feld über einen azimuthalen Vollkreis variiert, Moden mit dessen kleinstmöglichem Wert $m = 0$ sind demzufolge kreissymmetrisch um die z -Achse. Der Index n gibt die Anzahl der auf dem Weg von der Achse zum Rand des Rohres durchlaufenen Halbwellen⁴⁶ an, startet also bei $n = 1$, um die Variation von endlichen Feldwerten im Raum hin bis zu verschwindendem Feld an der Wand zu ermöglichen. In Abbildung A.4 sind beispielhaft die Felder der TM_{01} -Mode im runden Hohlleiter skizziert.

Die Grenzfrequenzen ω_i der einzelnen Moden lassen sich nun einfach in Abhängigkeit vom Radius a und der jeweiligen Grenzwellenzahl k_c^i berechnen: Gemäß (A.12) hängen die ω_i bis auf einen Proportionalitätsfaktor direkt von der jeweiligen Grenzwellenzahl der Mode ab. Diese ist nun durch die Bedingung $J'_m(k_c a) = 0$ für TE- und $J_m(k_c a) = 0$ für TM-Moden gegeben, man erhält für die Cut-Off-Frequenz ω_{mn} der jeweiligen Eigenschwingung den Zusammenhang

$$\omega_{mn} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} k_c^{mn} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \frac{j_{mn}^{(l)}}{a}, \quad (\text{A.22})$$

der Strich in Klammern gilt dabei nur für die TE-Wellen.

A.1.5 Hohlraumresonatoren

Wegen der z -Abhängigkeit $e^{\pm ikz}$ der elektromagnetischen Felder in einem Hohlleiter gibt es entlang des Rohres Knotenebenen, in denen die Felder verschwinden. Genau dort lassen sich nun leitende Platten einfügen, ohne die Feldgeometrie zu stören. An ihnen findet dann Reflexion statt und es bilden sich stehende Wellen aus, was zu folgender Abhängigkeit der Felder in z -Richtung führt:

$$A \sin kz + B \cos kz \quad . \quad (\text{A.23})$$

⁴⁶Hierbei sind die positiven und negativen Bögen (im Falle $m = 0$ ist es nur ein Halber) der um die Nulllinie oszillierenden Besselfunktionen gemeint.

Für einen Resonator der Länge l und Wänden bei $z = 0$ und $z = l$ führen die Randbedingungen zu folgender Einschränkung der Wellenzahl:

$$k = p \frac{\pi}{l}, \quad \text{mit } p = 0, 1, 2, \dots \quad . \quad (\text{A.24})$$

Der Index p gibt dabei die Anzahl der Halbwellen an, welche die Feldstärken in z -Richtung von einer Resonatorendfläche zur Anderen durchlaufen.

Da nun bei den TM-Wellen das elektrische Feld an den Endflächen keine transversale Komponente besitzen darf, muss es dort rein longitudinal sein. Für seine z -Komponente muss also die \cos -Abhängigkeit aus (A.23), zusammen mit (A.24), gelten:

$$E_z = E_z(r, \varphi) \cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right) \quad \text{mit } p = 0, 1, 2, \dots \quad . \quad (\text{A.25})$$

Dabei darf p bei Null anfangen, was ein konstantes Achsenfeld für diese Moden bedeutet: Sie hängen also nicht von der Länge des Hohlraumresonators ab! Bezeichnet werden die TM-Moden beim Resonator dann einfach mit Angabe aller drei Parameter, also TM_{mnp} . Die Grundmode, also diejenige mit der niedrigsten Frequenz, ist die TM_{010} -Mode.

Bei den TE-Wellen darf es keine longitudinale Komponente des H -Feldes geben. Diese stünde senkrecht auf den Endflächen, wo H_z verschwinden muss. Also kommt hier nur die \sin -Abhängigkeit in Frage:

$$H_z = H_z(r, \varphi) \sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right) \quad \text{mit } p = 1, 2, 3, \dots \quad . \quad (\text{A.26})$$

In diesem Fall ist der niedrigste Wert für p die Eins, für den Wert Null würde H_z über die komplette Resonatorlänge verschwinden. Die TE-Eigenschwingungen werden mit TE_{mnp} bezeichnet, die in der Frequenz niedrigste ist die TE_{111} -Mode.

Abschließend wird hier noch einmal der vollständige Ausdruck für E_z angegeben, da in der Beschleunigerphysik insbesondere das zum Strahl, also zur z -Achse, parallel verlaufende elektrische Feld von Bedeutung ist. Mit der Zeitabhängigkeit $e^{i\omega t}$, dem beim Hohlrohr ermittelten Zusammenhang (A.21) und schließlich dem longitudinalen Anteil aus (A.25) erhält man:

$$E_z = E_0 J_m\left(\frac{j_{mn}}{a} r\right) \cos(m \varphi) \cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right) e^{i\omega t} \quad . \quad (\text{A.27})$$

Dabei wurde für die Grenzwellenzahl k_c gemäß (A.22) der Quotient aus der n -ten Nullstelle j_{mn} der Besselfunktion m -ter Ordnung und dem Resonatorradius a eingesetzt.

A.2 Ähnlichkeitsgesetze für Hochfrequenzstrukturen

Die Feldgrößen in einem Hohlraumresonator, hier allgemein durch das Symbol Ψ verdeutlicht, werden durch die homogene Wellengleichung bestimmt:

$$\left(\Delta - \frac{1}{c} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Psi = 0 . \quad (\text{A.28})$$

Der kartesische Laplace-Operator lässt sich darin ausschreiben als

$$\Delta = \sum_{\nu} \frac{\partial^2}{\partial x_{\nu}^2} . \quad (\text{A.29})$$

Nun kann man die Koordinaten x und t aus (A.28) transformieren (vgl. [Her73]). Multipliziert man diese Gleichung mit dem Quadrat der Vakuumwellenlänge λ_0 und erweitert den Zeitterm mit einer aus der quadrierten Schwingungsdauer T gebildeten Eins, so erhält man:

$$\begin{aligned} & \sum_{\nu} \lambda_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x_{\nu}^2} - \frac{1}{c^2} \lambda_0^2 \frac{T^2}{T^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = 0 \\ \Rightarrow & \sum_{\nu} \frac{\partial^2}{\partial \left(\frac{x_{\nu}}{\lambda_0} \right)^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\lambda_0^2}{T^2} \frac{\partial^2}{\partial \left(\frac{t}{T} \right)^2} = 0 . \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

Die Lösungen dieser Gleichung sind Funktionen in x/λ_0 und t/T . Verändert man nun insbesondere alle Abmessungen des Resonators, also die Koordinaten x_{ν} , zusammen mit der Wellenlänge λ_0 um einen gleichen Faktor α , so bleiben die Lösungen erhalten. Gemäß $\nu = c/\lambda$ erhält man also für eine um den Maßstabsfaktor α vergrößerte Struktur eine um $1/\alpha$ verkleinerte Resonanzfrequenz.

A.3 Die Funktionsweise eines Lock-In-Verstärkers

Mit Hilfe eines sogenannten Lock-In-Verstärkers lassen sich Wechselspannungssignale mit Amplituden im Bereich weniger Nanovolt messen, auch wenn sie von einem mehrtausendfachen Rauschen überlagert werden. Dabei wird aus dem Meßsignal diejenige Komponente herausgelöst, welche in Frequenz *und* Phase einem vorgegebenen Referenzsignal entspricht. Rauschsignale außerhalb eines schmalen, durch die Bandbreite des Verstärkers vorgegebenen Bereichs um die Sollfrequenz beeinflussen die Messung nicht.

Die folgende Darstellung der Funktionsweise eines Lock-In-Verstärkers folgt weitestgehend [Sta04], S. 3-1f. Im üblichen Anwendungsfall für ein solches Gerät wird ein experimenteller Aufbau durch eine Signalquelle einer festen Frequenz ω_r angeregt und die Reaktion des Systems darauf gemessen. Das Anregungssignal bildet dann die Referenz, auf welche sich der Lock-In-Verstärker beziehen kann.

Dabei stellt dieser sein eigenes, internes Referenzsignal zur Verfügung, zunächst als freilau- fend mit der Frequenz ω_l angenommen:

$$V_l \sin(\omega_l t + \Theta_{\text{ref}}) \quad (\text{A.31})$$

Hierbei bezeichnet V_l die Amplitude und Θ_{ref} den Phasenunterschied zur externen Referenz.

Am Eingang des Verstärkers liegt nun ein Messsignal der Form

$$V_{\text{sig}} \sin(\omega_r t + \Theta_{\text{sig}}) \quad (\text{A.32})$$

an, mit der Amplitude V_{sig} und Phasendifferenz zum Referenzsignal Θ_{sig} .

Herzstück des Lock-In-Verstärkers ist der sogenannte phasensensitive Detektor, kurz PSD ge- nannt. Dieser Multipliziert die Signale (A.31) und (A.32), was dann folgendes Ausgangsprodukt ergibt:

$$\begin{aligned} V_{\text{psd}} &= V_{\text{sig}} V_l \sin(\omega_r t + \Theta_{\text{sig}}) \sin(\omega_l t + \Theta_{\text{ref}}) \\ &= \frac{1}{2} V_{\text{sig}} V_l \cos((\omega_r - \omega_l) t + \Theta_{\text{sig}} - \Theta_{\text{ref}}) - \\ &\quad \frac{1}{2} V_{\text{sig}} V_l \cos((\omega_r + \omega_l) t + \Theta_{\text{sig}} + \Theta_{\text{ref}}) \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

Synchronisiert man nun den internen Oszillator des Lock-Ins mit dem Anregungssignal, sorgt also für die Entsprechung $\omega_l = \omega_r$, so wird der Term mit der Differenzfrequenz zu einem Gleichspannungssignal. Filtert man nun den verbleibenden Wechselspannungsanteil mittels eines hinter den Ausgang des PSD geschalteten Tiefpass-Filters weg, so bleibt folgende Spannung übrig:

$$V_{\text{psd}} = \frac{1}{2} V_{\text{sig}} V_l \cos(\Theta_{\text{sig}} - \Theta_{\text{ref}}) . \quad (\text{A.34})$$

Damit hat man ein Gleichspannungssignal gewonnen, welches proportional zur Signalamplitude ist. Die Signalstärke kann optimiert werden, indem die Phasendifferenz $\cos(\Theta_{\text{sig}} - \Theta_{\text{ref}})$ auf Null geregelt wird, bei einem Lock-In-Verstärker mit *auto phasing*-Funktion geschieht dies automa- tisch.

Der Einfluß des Rauschens auf die Messung wird durch die Kombination aus PSD und Filter stark reduziert, da nur solche Anteile des Eingangssignals einen Beitrag zum Gleichspannungs- Ausgangssignal beisteuern, welche in ihrer Frequenz sehr nahe der Referenzfrequenz ω_r liegen. Weiter entfernt liegende Signale, wie das über die komplette Bandbreite der Schaltung verteil- te Rauschen, werden in eine Wechselspannung umgesetzt und von dem Tiefpass-Filter nahezu vollständig eliminiert. Die Bandbreite des Tiefpasses bestimmt also die tatsächliche Bandbreite der Messung.

A.4 Die Funktionsweise eines Mischers

Bei einem Mischer handelt es sich um ein nichtlineares Bauelement, Strom und Spannung unterliegen keinem linearen Zusammenhang. Beispiel hierfür ist die Kennlinie einer Halbleiterdiode, die mit

$$I(U) = I_S \cdot (e^{U/U_T} - 1) \quad (\text{A.35})$$

gegeben ist. Dabei steht I_S für den Sperrstrom, der bei einer gegen die Durchlassrichtung angelegten Spannung fließt, und U_T für die von der Umgebung abhängige Temperaturspannung (vgl. [DS03], S. 213ff, die folgende Darstellung lehnt sich daran an).

Im allgemeinen Fall wählt man sich auf der Kennlinie durch eine entsprechend eingestellte *Vorspannung* U_0 einen sogenannten *Arbeitspunkt*, um den herum dann nur mit kleinen Signalen angesteuert wird. Für eine gegebene Signalspannung $\Delta u(t)$ kann der zugehörige Strom $\Delta i(u)$ dann im Arbeitspunkt in eine Potenzreihe entwickelt werden:

$$\Delta i = k_1 \cdot \Delta u + k_2 \cdot \Delta u^2 + k_3 \cdot \Delta u^3 + \dots \quad (\text{A.36})$$

Die Koeffizienten k_i bezeichnen hier die i -te Ableitung des Stroms nach der Spannung, ausgewertet an der Stelle U_0 :

$$k_i = \left. \frac{di}{du} \right|_{U_0} \quad (\text{A.37})$$

Steuert man nun das Bauteil mit zwei Signalen unterschiedlicher Frequenz und Phase, gegeben durch

$$\Delta u(t) = U_1 \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + U_2 \cdot \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \quad , \quad (\text{A.38})$$

aus, so ergeben sich wegen der quadratischen Glieder der Taylorentwicklung auch Terme mit dem Quadrat des Kosinus. Gemäß

$$\cos^2 \alpha = (1 + \cos 2\alpha)/2 \quad (\text{A.39})$$

lassen sich diese auflösen, man erhält im Strom also neben den eingehenden Frequenzen ω_1 und ω_2 auch Anteile bei den verdoppelten Frequenzen $\omega = 2\omega_1$ sowie $\omega = 2\omega_2$.

Als eigentliche Nutzsignale sind für den angestrebten Verwendungszweck allerdings diejenigen Terme der Reihe interessant, die sich aus dem folgenden Produkt zweier Winkelfunktionen per Additionstheorem ergeben:

$$\begin{aligned} \Delta i(t) &= \dots + 2 k_2 U_1 U_2 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \cdot \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + \dots \\ &= \dots + k_2 U_1 U_2 \cos((\omega_1 - \omega_2)t + \varphi_1 - \varphi_2) \\ &\quad + k_2 U_1 U_2 \cos((\omega_1 + \omega_2)t + \varphi_1 + \varphi_2) + \dots \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

Offensichtlich sind Anteile mit der Differenzfrequenz $\omega_1 - \omega_2$ sowie solche mit der Summenfrequenz $\omega_1 + \omega_2$ im Ausgangssignal enthalten, man spricht hierbei von *Mischung*. Die (signal-schwächeren) Terme höherer Ordnung werden hier nicht weiter besprochen, je nach Anwendungsgebiet sind sie allerdings kritisch auf ihren eventuell störenden Einfluss hin zu prüfen (vgl. [DS03], S. 217).

Ein als *Mischer* bezeichnetes Bauteil wird nun gemäß der oben genannten Prinzipien mit zwei Frequenzen angesteuert, eine davon geht auf seinen als LO⁴⁷ bezeichneten Eingang. Das zweite Eingangssignal wird nun auf den RF-Eingang⁴⁸ gelegt. Am dritten, mit IF⁴⁹ bezeichneten

⁴⁷engl. „local oscillator“

⁴⁸engl. „radio frequency“, synonym für das deutsche „Hochfrequenz“ verwendet

⁴⁹engl. „intermediate frequency“

Anschluss, kann nun ein Signal bei der sogenannten *Zwischenfrequenz* abgegriffen werden, es handelt sich hierbei um die Differenzfrequenz $\omega_{\text{RF}} - \omega_{\text{LO}}$.

Der Mischer ist nun so konzipiert, dass er am LO-Eingang einen Mindestsignalpegel erwartet. Liegt dieser vor, so ist die Höhe des Ausgangssignal am IF-Ausgang im Wesentlichen vom Pegel des RF-Signals abhängig. Genutzt wird der Mischer beispielsweise zum *Heruntermischen* eines hochfrequenten Nutzsignals bei ω_{RF} mit einer relativ naheliegenden, durch einen stabilen Signalgenerator gelieferten Frequenz ω_{LO} zu einer für die Weiterverarbeitung günstig liegenden Frequenz ω_{IF} .

Zu beachten ist dabei, dass der Mischer auch Signale bei der sogenannten *Spiegelfrequenz* in den Zwischenfrequenzbereich heruntermischt, welche zwar genau wie ω_{RF} um einen Betrag ω_{IF} von der Frequenz ω_{LO} abweicht, aber mit entgegengesetztem Vorzeichen. Ganz allgemein ist je nach Einsatzzweck dafür Sorge zu tragen, dass sich die ebenfalls entstehenden Kombinationsfrequenzen

$$\omega = |\pm \omega_{\text{RF}} \pm \omega_{\text{LO}}|, \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad (\text{A.41})$$

nicht störend auswirken und bei Bedarf durch Einsatz entsprechender Filter herausgenommen werden ([DS03], S. 219).

B Konstruktionszeichnungen

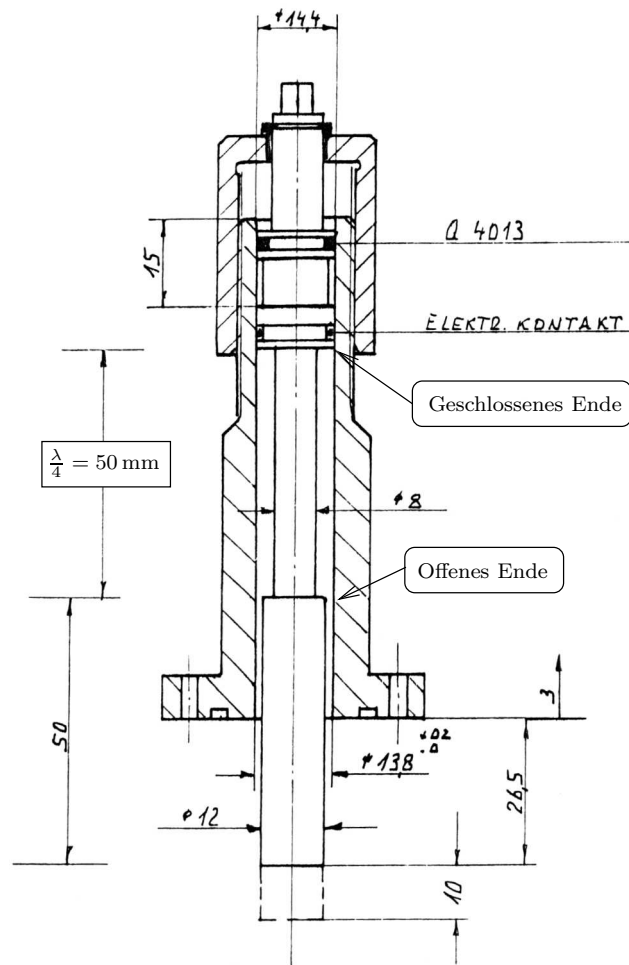


Abbildung B.1: Der Abstimmstempel mit seiner Halterung (Konstruktion: B. Neff)

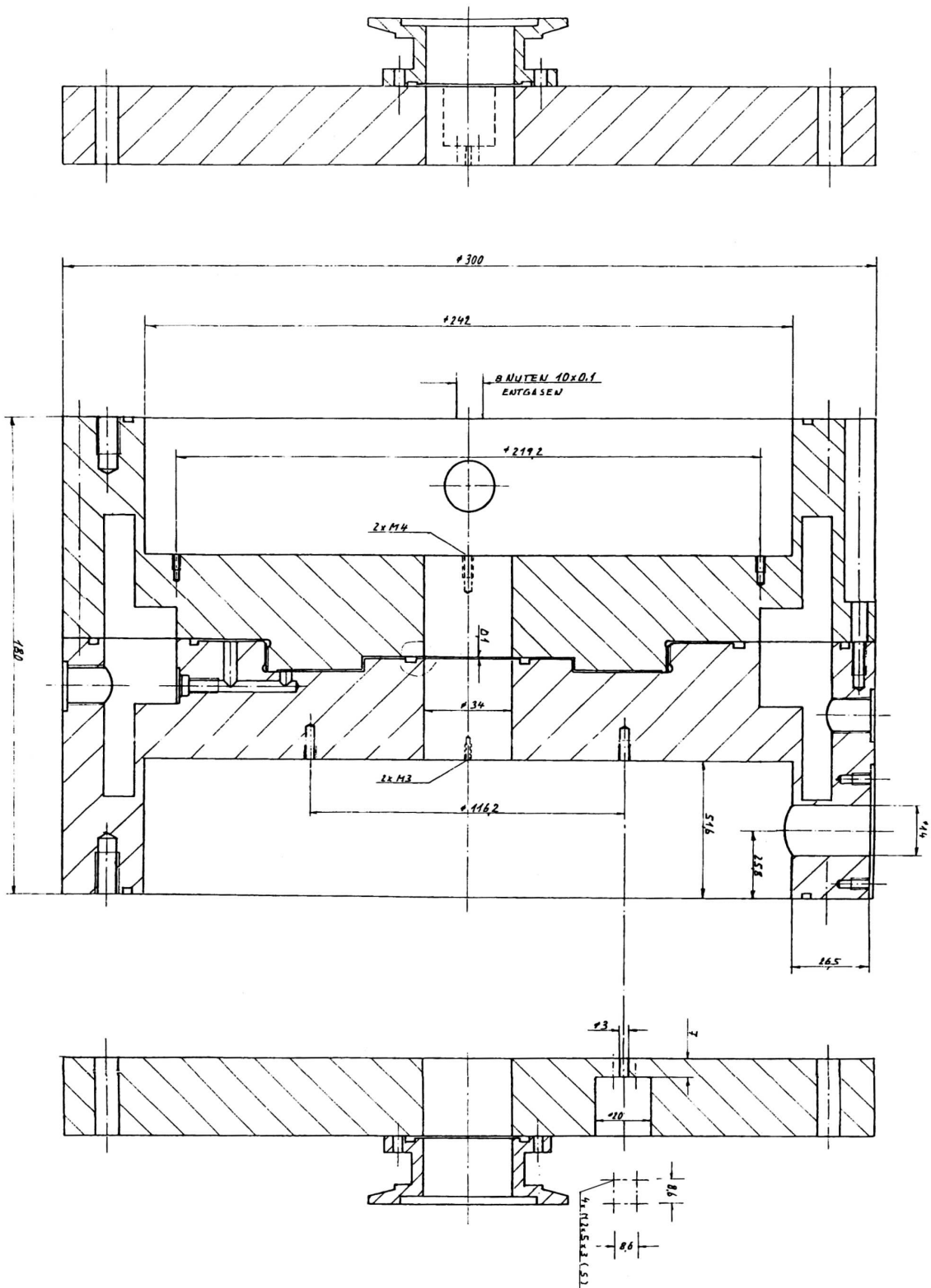


Abbildung B.2: Konstruktionszeichnung des Lagerresonators nach der simulierten Geometrie, mit Vorrichtung zur Wasserkühlung (Ausführung: B. Neff, Konzeption: B. Neff, W. Hillert)

Literatur

- [Ach78] ACHILLES, Dietmar: *Die Fouriertransformation in der Signalverarbeitung*. Berlin; Heidelberg; New York : Springer-Verlag, 1978
- [AS72] ABRAMOWITZ, Milton (Hrsg.) ; STEGUN, Irene A. (Hrsg.): *Handbook of Mathematical Functions*. 9. Auflage. New York : Dover Publications, Inc., 1972
- [BS99] BRONSTEIN, I.N. ; SEMENDJAJEV, K.A. ; MUSIOL, Gerhard (Hrsg.) ; MÜHLIG, Heiner (Hrsg.): *Taschenbuch der Mathematik*. 4. Auflage. Frankfurt am Main; Thun : Verlag Harri Deutsch, 1999
- [CST01] CST - Gesellschaft für Computer-Simulationstechnik mbH: *MAFIA 4 Getting Started - A guided tour through the most common features of MAFIA*. November 2001
- [DS03] DETLEFSEN, Jürgen ; SIART, Uwe: *Grundlagen der Hochfrequenztechnik*. München; Wien : Oldenbourg Verlag, 2003
- [Fey67] FEYNMAN, Richard P. ; LEIGHTON, Robert B. (Hrsg.) ; SANDS, Matthew (Hrsg.): *The Feynman Lectures on Physics*. Bd. 2. Reading, Massachusetts : Addison-Wesley Publishing Company, 1967
- [GV97] GERTHSEN, Christian ; VOGEL, Helmut: *Gerthsen Physik*. 19. Auflage. Berlin; Heidelberg : Springer-Verlag, 1997
- [Her73] HERMINGHAUS, Helmut: *Linearbeschleuniger für Ionen und Elektronen*. Vorlesungsmitschrift Sommersemester 1973, Universität Mainz, 1973
- [Hil04] HILLERT, Wolfgang: *Particle Accelerator Physics I*. Vorlesungsskript Sommersemester 2004, Physikalisches Institut der Universität Bonn, 2004
- [Hil05] HILLERT, Wolfgang: *E 106 Hohlraumresonatoren / Cavities : Ergänzende Informationen zur Versuchsdurchführung*. Versuchsanleitung für das Fortgeschrittenenpraktikum, Physikalisches Institut der Universität Bonn, 2005
- [Hin97] HINTERBERGER, Frank: *Physik der Teilchenbeschleuniger und Ionenoptik*. Berlin; Heidelberg; New York : Springer-Verlag, 1997
- [Jac98] JACKSON, John D.: *Classical Electrodynamics*. 3. Auflage. John Wiley & Sons, Inc., 1998
- [Kla76] KLAGES, Gerhard: *Einführung in die Mikrowellenphysik*. 3. Auflage. Darmstadt : Dr. Dietrich Steinkopff Verlag, 1976
- [Klu94] KLUXEN, David: *Ein Hochfrequenz-Intensitätsmonitor für die Strahlführung des ELAN-/SAPHIR-Experiments an ELSA*, Universität Bonn, Diplomarbeit, November 1994
- [Lan64] LANCE, Algie L.: *Introduction to microwave theory and measurements*. New York; Toronto; London : McGraw-Hill Book Company, 1964
- [Mer80a] MERTIN, Burkhard: *Hochfrequenz-Lagemonitore für den LINAC / MAMI*, Institut für Kernphysik, Johannes Gutenberg Universität Mainz. Mainz, 1980 (7). – Interne Notiz

-
- [Mer80b] MERTIN, Burkhard: *Das Hochfrequenz-Strahlmonitorsystem für die 14 MeV-Stufe des MAMI-Projektes*. Mainz, Institut für Kernphysik, Johannes Gutenberg Universität Mainz, Diplomarbeit, 1980
- [Mit92] MITTWICH, Dietmar: *Entwicklung und Erprobung eines Hochfrequenzmonitors zur Messung der Intensität und Lage eines 855 MeV Elektronenstrahls*. Mainz, Institut für Kernphysik, Johannes Gutenberg Universität Mainz, Diplomarbeit, 1992
- [San70] SANDS, Matthew: *The Physics of Electron Storage Rings - An Introduction / Stanford Linear Accelerator Center*. Stanford, CA, November 1970 (SLAC-121 UC-28). – SLAC-Report
- [Sch04] SCHUMANN, Steffen: *Das Hochfrequenz-Monitorsystem für MAMI C / MAMI*, Institut für Kernphysik, Johannes Gutenberg Universität Mainz. 2004. – Interne Notiz
- [Sta04] Stanford Research Systems: *MODEL SR830 DSP Lock-In Amplifier*. Revision 2.1. Juli 2004
- [TMC00] The MAFIA Collaboration: *MAFIA – Theory*. September 2000. – Auszug aus der MAFIA-Dokumentation
- [Wil92] WILLE, Klaus: *Physik der Teilchenbeschleuniger und Synchrotronstrahlungsquellen*. Stuttgart : B.G.Teubner, 1992

Danksagung

Ohne die Unterstützung vieler Personen wäre die Erstellung dieser Arbeit nicht möglich gewesen, weshalb ich mich an dieser Stelle für den Einsatz und die Hilfsbereitschaft bedanken möchte.

Insbesondere Herr PD Dr. Wolfgang Hillert hat sich jederzeit und uneingeschränkt für die sich ergebenden Fragen und Problemstellungen offen und hilfsbereit gezeigt. Durch seine Hilfestellung hat die Arbeit überhaupt erst in ihrer jetzigen Form entstehen können.

Ebenfalls herzlich danken möchte ich Herrn Dr. Frank Frommberger, der sich jederzeit bei auftretenden Fragen um deren Lösung bemüht und sich insbesondere mit dem Aufbau und Einrichten einer PC-basierten Auslese und Steuerung maßgeblich beteiligt hat.

Mein weiterer Dank gilt den studentischen und wissenschaftlichen Mitgliedern der Arbeitsgruppe, die mich jederzeit und insbesondere in der Schlussphase der Arbeit unterstützt haben. Insbesondere Maren Eberhardt und Andreas Balling haben sich auch intensivst mit dem Korrekturlesen der Arbeit beschäftigt, Jürgen Wittschen hat sich bei auftretenden Hardwareproblemen mit Rat und Tat engagiert.

Außerdem gilt mein Dank Herrn Bücking, der mit viel Sorgfalt die Elektronik zur Lagemesung zusammengefügt hat.

Herr Neff hat die technische Konzeption und das Anfertigen von Konstruktionszeichnungen des Lagecavitys übernommen, dafür gilt ihm mein herzlicher Dank.

Allen Mitgliedern der Arbeitsgruppe ELSA ist es zu verdanken, dass bei der täglichen Arbeit ein herzliches Miteinander besteht, welches viele Dinge erleichtert.

Mein weiterer Dank gilt Herrn Professor Dr. Maier, welcher das Koreferat übernommen hat.

Mein besonderer Dank gilt Natalie Gerlich, die mich von Anfang an und unter besonderer Belastung in der Schlussphase der Arbeit unterstützt und motiviert hat.

Schließlich möchte ich noch meiner Familie danken, welche mir jegliche Unterstützung hat zukommen lassen und mir das Studium ermöglicht hat.